Gesammelte Abhandlungen

Gustav Kirchhoff,
Ludwig Boltzmann


SIGILLUM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS


Digitized by Google

GESAMMELTE ABHANDLUNGEN

VON

G. KIRCHHOFF

NACHTRAG

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. LUDWIG BOLTZMANN
PROFESSOR DER THEORETISCHEN PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MIT EINER TAFEL



LEIPZIG
JOHANN AMBROSIUS BARTH
1891

KIRCHHOFF

GESAMMELTE ABHANDLUNGEN

NACHTRAG

GESAMMELTE
ABHANDLUNGEN

VON

Gustav (Robert)

G. KIRCHHOFF

NACHTRAG

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. LUDWIG BOLTZMANN

PROFESSOR DER THEORETISCHEN PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MIT EINER TAFEL



LEIPZIG

JOHANN AMBROSIUS BARTH

1891

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort.

Im Jahre 1882 hat Kirchhoff selbst eine Gesammtausgabe seiner bis dahin erschienenen Abhandlungen herausgegeben. Seitdem hat er noch eine nicht geringe Anzahl von Aufsätzen veröffentlicht. Tritt Kirchhoff daselbst auch nirgends so schöpferisch auf, wie in vielen der früheren Abhandlungen, so bilden sie doch eine sehr wesentliche Ergänzung dazu und ich bin daher gern der Aufforderung des Herrn Verlegers gefolgt, sie zu einem Nachtrage zu Kirchhoff's gesammelten Abhandlungen zu vereinigen.

Eines der Hauptziele, welche Kirchhoff in seinen Abhandlungen und Vorlesungen anstrebte, war der Aufbau der theoretischen Physik auf möglichst klaren Principien und die Ausbildung und Vollendung ihrer Methoden. Durch jahrelange Arbeit gelang es ihm diese so durchzubilden, dass er ein Instrument gewann, welches nach fest ausgebildeten Regeln arbeitete und immer in der einfachsten und sichersten Weise zur Lösung der Aufgabe führte. Gerade zur Erläuterung der Treffsicherheit und der Art und Weise der Behandlung dieses Instruments sind die nachfolgenden Abhandlungen besonders geeignet. In vielen derselben (Nr. 2, 3, 6, 7) zeigte er, wie von andern gefundene Resultate mittelst desselben theils in weit einfacherer und eleganterer Form gewonnen, theils wesentlich ergänzt und erweitert werden können, wobei zugleich ihre Beziehungen zu den übrigen Theilen der theoretischen Physik in's klarste Licht gesetzt werden.

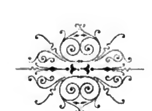
Dabei tritt allenthalben neben dem Sinne für mathematische Consequenz der scharfe Blick Kirchhoff's für physikalische Verwerthbarkeit hervor, welche durch die wenigen der Vollständigkeit halber hier ebenfalls aufgenommenen Versuche Hansemann's noch lange nicht erschöpft und ausgenutzt sein dürfte. So möge denn dieses Buch zur Förderung des Studiums der sicher für Theoretiker und Experimentatoren in gleichem Masse anregenden Abhandlungen Kirchhoff's das Seine beitragen!

Da mehrere Abhandlungen auf dem Grenzgebiete zwischen Elasticitätstheorie, Electricitätslehre und Optik oder zwischen Wärmelehre und Hydromechanik stehen, so wäre bei einer Gruppirung nach den behandelten Stoffen eine gewisse Willkürlichkeit nicht zu vermeiden gewesen, und ich habe grösstentheils die chronologische Reihenfolge beibehalten.

München, im Januar 1891.

Ludwig Boltzmann.

Inhaltsverzeichniss.



1. Ueber die Leitungsfähigkeiten der Metalle für Wärme und Electricität;

von G. Kirchhoff und G. Hansemann.

(Sitzber. d. k. Acad. der Wiss. zu Berlin vom 12. Mai 1881. Wied. Ann. **13.** p. 406. 1881.)

In einer früheren Abhandlung[1]) haben wir eine neue Methode zur Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit von Metallen auseinandergesetzt und durch ein Beispiel erläutert. Wir hatten damals schon die Absicht, diese Methode auf eine Reihe von Metallen anzuwenden und zugleich die electrischen Leitungsfähigkeiten derselben zu messen, um einen Beitrag zur Entscheidung der Frage zu liefern, ob das Verhältniss der beiden Leitungsfähigkeiten, der Vermuthung von Forbes, Wiedemann und Franz gemäss, constant ist. Wir haben nun in dieser Weise ausser dem Eisen, von dem in der citirten Abhandlung die Rede ist, zwei andere Eisensorten und je eine Sorte von Blei, Zinn, Zink und Kupfer untersucht und wollen hier die Resultate, zu denen wir dabei gelangt sind, angeben.

Die Versuche über die Wärmeleitung wurden alle ganz in der Art ausgeführt, die an dem angeführten Orte beschrieben ist; bei der Berechnung derselben für einige Metalle haben wir aber eine kleine Aenderung eintreten lassen, indem wir ein Glied berücksichtigten, welches beim Eisen unbedenklich vernachlässigt werden durfte, bei grösserer Leitungsfähigkeit aber einen merkbaren Einfluss ausüben konnte. Wir haben

---

1) Kirchhoff und Hansemann, Wied. Ann. **9.** p. 1. 1880; ges. Abh. p. 495.

nämlich auf der rechten Seite der Gleichung (11) a. a. O. das Glied:

$$\int_0^t \varphi(t')\,dt' \frac{\partial R(t-t')}{\partial t}$$

hinzugefügt, wo $R(t)$ die dort mit R bezeichnete und durch die Gleichung (5) definirte Function von t bedeutet. Infolge hiervon musste in der Gleichung (15), nach der die numerischen Rechnungen zu führen waren, auf der rechten Seite hinzugefügt werden:

$$\int_0^{U\left(\frac{2l-z-z_0}{2\sqrt{at}}\right)} \left(E_0(t') - CU\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at'}}\right)\right) dU,$$

wo:

$$U = U\left(\frac{2l-z-z_0}{2\sqrt{a(t-t')}}\right).$$

Die folgenden Tabellen enthalten die Ergebnisse dieser Versuche in derselben Anordnung, die auf p. 45 (ges. Abh. p. 538) der angeführten Abhandlung benutzt ist. In derselben bezeichnet a die Leitungsfähigkeit, dividirt durch das Product aus der specifischen Wärme in die Dichtigkeit, d. h. nach dem Ausdrucke des Herrn H. F. Weber die Temperaturleitungsfähigkeit, bezogen auf Millimeter und Secunde als Einheiten, und ϑ ist die Temperatur in Celsius'schen Graden.

Eisen II. Bessemer Stahl der Dortmunder Union, enthaltend:
0,519 % Kohle 0,343 % Silicium.

Vers.-Nr.	Werthe v. z u. t	ϑ_0	ϑ_1	ϑ	a beobacht.	a berechnet	Differenz
1	$z = 70{,}25$ mm $t = 145$ Sec.	9,8	2,9	7,7	11,57	11,62	−0,05
2		8,4	2,1	6,5	11,68	11,64	+0,04
3		17,6	11,0	15,6	11,46	11,47	−0,01
4		14,4	8,9	12,7	11,56	11,52	+0,04
5		15,4	9,0	13,5	11,54	11,51	+0,03
6		15,0	9,4	13,3	11,44	11,51	−0,07
7		16,8	23,5	18,8	11,46	11,41	+0,05
8		16,5	23,4	18,6	11,42	11,41	+0,01
9		17,0	23,6	19,0	11,40	11,40	0,00
10		17,1	23,7	19,1	11,41	11,40	+0,01
11		16,3	23,2	18,4	11,37	11,41	−0,04

$$a = 11{,}48 - 0{,}019\,(\vartheta - 15).$$

Eisen III. Puddelstahl der Dortmunder Union, enthaltend:

0,254 % Kohle 0,077 % Silicium.

Vers.-Nr.	Werthe v. z u. t	ϑ_0	ϑ_1	ϑ	a beobacht.	a berechnet	Differenz
1	$z = 70{,}07$ mm $t = 145$ Sec.	15,5	8,4	13,1	16,40	16,42	−0,02
2		16,0	9,0	13,6	16,40	16,41	−0,01
3		15,7	8,8	13,3	16,48	16,42	+0,06
4		15,7	22,1	17,9	16,30	16,29	+0,01
5		17,2	24,5	19,7	16,28	16,24	+0,04
6		17,7	25,2	20,2	16,28	16,24	+0,04
7		16,1	22,3	18,2	16,30	16,28	+0,02
8		16,8	23,1	18,9	16,14	16,27	−0,13
9		14,4	8,1	12,3	16,50	16,44	+0,06
10		10,2	4,4	8,2	16,50	16,55	−0,05

$$a = 16{,}37 - 0{,}027\,(\vartheta - 15).$$

Blei. Clausthaler Weichblei.

Vers.-Nr.	Werthe v. z u. t	ϑ_0	ϑ_1	ϑ	a beobacht.	a berechnet	Differenz
1	$z = 70{,}52$ mm $t = 115$ Sec.	16,8	11,0	13,8	24,15	24,06	+0,09
2		16,4	11,7	14,0	24,04	24,05	−0,01
3		16,7	11,3	13,9	24,09	24,06	+0,03
4		16,8	11,0	13,8	24,04	24,06	−0,02
5		16,1	10,5	13,2	24,04	24,10	−0,06
6		16,6	21,8	19,3	23,73	23,71	+0,02
7		16,1	22,4	19,4	23,68	23,71	−0,03
8		16,1	23,2	19,7	23,64	23,68	−0,04
9		16,3	23,1	19,8	23,73	23,68	+0,05
10		16,3	22,6	19,5	23,66	23,70	−0,04

$$a = 23{,}99 - 0{,}064\,(\vartheta - 15).$$

Zinn. Bestes englisches Bancazinn.

Vers.-Nr.	Werthe v. z u. t	ϑ_0	ϑ_1	ϑ	a beobacht.	a berechnet	Differenz
1	$z = 70{,}03$ mm $t = 90$ Sec.	14,4	9,8	12,2	38,88	38,89	−0,01
2		15,4	10,3	13,0	38,87	38,81	+0,06
3		14,8	9,8	12,5	39,00	38,87	+0,13
4		14,9	10,1	12,7	38,70	38,85	−0,15
5		15,7	10,6	13,3	38,70	38,78	−0,08
6		15,0	10,3	12,8	38,87	38,84	+0,03
7		16,1	20,3	18,1	38,16	38,28	−0,12
8		15,5	21,3	18,2	38,29	38,27	+0,02
9		15,8	20,9	18,2	38,24	38,27	−0,03
10		15,6	21,0	18,1	38,43	38,28	+0,15

$$a = 38{,}60 - 0{,}105\,(\vartheta - 15).$$

Zink. WH Zink von G. v. Giesche's Erben.

Vers.-Nr.	Werthe v. z u. t	ϑ_0	ϑ_1	ϑ	a beobacht.	a berechnet	Differenz
1	$z = 70{,}73$ mm $t = 90$ Sec.	15,5	11,9	—	40,46	40,49	−0,03
2		16,2	10,4	—	40,50	,,	+0,01
3		16,3	10,5	—	40,42	,,	−0,07
4		15,6	9,9	—	40,57	,,	+0,08
5		14,8	10,7	—	40,50	,,	+0,01
6		13,7	19,1	—	40,38	,,	−0,11
7		14,5	21,5	—	40,46	,,	−0,03
8		15,3	20,8	—	40,34	,,	−0,15
9		16,6	21,6	—	40,62	,,	+0,13
10		16,8	22,7	—	40,64	,,	+0,15

Die Mittel aus den 5 ersten und aus den 5 letzten der beobachteten Werthe von a sind hier einander gerade gleich. Danach ist eine Abhängigkeit dieser Grösse von der Temperatur beim Zink nicht zu erkennen; es ist im Mittel:

$$a = 40{,}49.$$

Kupfer. Aus der Giesserei von C. Heckmann in Berlin; nach später vorgenommener Analyse phosphorhaltig.

Vers.-Nr.	Werthe v. z u. t	ϑ_0	ϑ_1	ϑ	a beobacht.	a berechnet	Differenz
1	$t = 90$ Secunden, $z = 69{,}79$ mm	15,5	20,1	21,4	50,77	51,13	−0,36
2		16,3	21,7	23,2	51,02	51,19	−0,17
3		17,8	23,4	25,0	51,29	51,24	+0,05
4		18,7	25,2	27,1	51,40	51,30	+0,10
5		20,2	25,8	27,4	51,31	51,31	0,00
6		20,7	15,0	13,3	51,02	50,90	+0,12
7		19,9	15,5	14,2	50,75	50,92	−0,17
8		19,8	14,6	13,1	50,79	50,89	−0,10
9		20,5	15,7	14,3	51,00	50,93	−0,07
10		19,8	14,6	13,1	50,56	50,89	−0,33
11	$t = 65$ Sec.	20,2	15,7	14,9	51,26	50,94	+0,32
12		19,5	15,8	15,1	51,05	50,95	+0,10
13		20,0	15,8	15,1	51,31	50,95	+0,36

$$a = 50{,}95 + 0{,}029\,(\vartheta - 15).$$

Der Temperaturcoëfficient ist hier, was auffallen kann, positiv, während er bei Zink gleich Null, bei allen anderen Metallen sich negativ ergeben hatte. Sein Werth ist freilich

überall sehr unsicher, da er aus Versuchen berechnet ist, bei denen die Temperatur nur um wenige Grade verschieden war, und er nur dazu dienen sollte, die Messungen auf eine Temperatur zu reduciren. Doch auch Herr Tait[1]) hat aus seinen Versuchen, bei denen die Temperatur bis 300° C. gesteigert wurde, geschlossen, dass wahrscheinlich beim Kupfer die Temperaturleitungsfähigkeit bei steigender Temperatur zunimmt, während sie beim Eisen abnimmt. Zwar gibt er an, dass auch Blei sich wie Kupfer verhält; er legt hierauf aber nur ein geringes Gewicht, da er das Blei nicht über 100° C. erwärmte, und diese Temperatur zu niedrig war, um die Aenderungen der Leitungsfähigkeit bei seiner Methode mit einiger Sicherheit zu zeigen.

Um die electrische Leitungsfähigkeit der Metalle zu messen, liessen wir aus den benutzten Würfeln Stäbe von der Länge einer Kante und einem quadratischen Querschnitt von 3 bis 5 mm Seite sägen und schleifen. Es wurde die Länge eines jeden Stabes, sein absolutes und specifisches Gewicht bestimmt, hieraus sein Querschnitt berechnet und dann die Methode angewandt, deren Theorie einer von uns früher entwickelt hat.[2])

Bei dieser Methode war aus dem Stabe, dessen Leitungsfähigkeit bestimmt werden sollte, einem Widerstandsetalon und einer Kette eine Schliessung zu bilden; es waren dann dem Stabe und dem Etalon Nebenleitungen zu geben, die die beiden Gewinde eines Differentialgalvanometers enthielten, und deren Widerstände messbar verändert werden konnten. Der Stab ruhte in einem Petroleumbade, durch ein Gewicht belastet, horizontal mit den vier Ecken einer seiner langen Flächen auf vier federnden, isolirten Metallplättchen, von welchen zwei zur Zu- und Ableitung des Stromes der aus zwei Daniell'schen Elementen bestehenden Kette dienten,

---

1) Tait, Edinb. Trans. 28. p. 735. 1878.
2) Kirchhoff, Berl. Ber. 1880. p. 601; ges. Abh. p. 66.

während die beiden anderen mit den Drähten verbunden waren, die zu dem einen Gewinde des Galvanometers führten. Als Etalon wurde ein ungefähr 9 m langer, 1,3 mm dicker Kupferdraht benutzt, der bifilar zu einer Spirale aufgewunden war und ebenfalls in einem Petroleumbade sich befand. Jedes der beiden Gewinde des Galvanometers bestand aus zwei Theilen von ungleicher Grösse; die beiden grösseren Theile bildeten die Hauptrolle, die die eine Nadel des astatischen Paares umgab, und wurden bei den Versuchen von Strömen von entgegengesetzten Richtungen durchflossen; die beiden kleineren bildeten eine Hülfsrolle, die neben jener sich befand und um eine verticale Axe drehbar war; in ihnen hatten die Ströme gleiche Richtung. Wurde derselbe Strom durch die beiden Gewinde geleitet, so konnte die Hülfsrolle so eingestellt werden, dass die Nadel des Galvanometers keine Winkelablenkung zeigte. War diese Einstellung für einen Strom von gewisser Intensität bewirkt, so galt dieselbe aber nicht mehr für einen Strom von erheblich verschiedener Intensität infolge der seitlichen Verschiebung, welche die Nadel durch die Wirkung des Stromes erfuhr, und welche um so grösser sein musste, je grösser die Intensität des Stromes war. Um den Fehler zu vermeiden, den dieser Umstand bei unseren Messungen hervorbringen konnte, regulirten wir die Stellung der Hülfsrolle mit Hülfe von Strömen, deren Intensität nicht sehr verschieden von der Intensität derjenigen war, die dort wirkten. Wir hatten die Einrichtung getroffen, dass durch Umlegen einer Wippe die dort zu benutzende und schon beschriebene Anordnung in eine andere verwandelt werden konnte, bei der der Strom der Kette nur einmal in zwei Zweige sich theilte, von denen der eine den Stab, den Etalon und den diese verbindenden Draht, der andere die beiden Gewinde des Galvanometers und die hinzugefügten Drähte enthielt. Bei dieser Anordnung wurde die Hülfsrolle eingestellt. Wurde nun die Wippe rückwärts umgelegt und zeigte sich auch dann keine Galvanometerablenkung, so hatten die Widerstände der beiden Nebenleitungen das gesuchte Verhältniss. Geändert konnte dieses werden mit Hülfe eines Siemens'schen Widerstandssatzes, der in der Nebenleitung des Elatons sich befand

und gestattete, Widerstände von 0,1 bis 10 000 S.-E. einzuführen. War der passende Widerstand dieser Nebenleitung gefunden, so wurde der der zweiten Nebenleitung um 0,5 oder um 1 S.-E. vergrössert und die entsprechende Vergrösserung des Widerstandes der ersten Nebenleitung bestimmt. Das Verhältniss dieser beiden Vergrösserungen war dann das Verhältniss der Widerstände des Stabes und des Etalons. Diese Bestimmungen liessen sich leicht und sicher ausführen, wenn die Belastung des Stabes nicht zu klein war und die Dauer der Ströme nicht zu kurz gewählt wurde. Die Temperaturen, für welche sie gelten, wurden an zwei Thermometern abgelesen, die in die Bäder tauchten, in denen der Stab und der Etalon sich befanden, und die mit Rührvorrichtungen versehen waren, welche durch einen kleinen Wassermotor in Bewegung erhalten werden konnten. Der Regel nach wurde das den Stab enthaltende Bad bis etwa 35° C. erwärmt und, während dasselbe von 30° bis auf die Zimmertemperatur unter fortwährendem Rühren sich abkühlte, eine Anzahl, meist 15, Widerstandsmessungen gemacht. Je drei von diesen wurden so schnell hintereinander ausgeführt, dass in den Zwischenzeiten nur sehr kleine Temperaturänderungen, wenn überhaupt welche, sich zeigten; es wurden die Zeiten der Thermometerablesungen und der Widerstandseinstellungen notirt und mit ihrer Hülfe durch Interpolation die Temperaturen berechnet, die den gefundenen Widerständen entsprachen.

Um ein Urtheil über die Genauigkeit zu gewähren, die bei diesen Messungen erlangt ist, führen wir die Resultate der einzelnen Versuche an, die mit einem Bleistabe ausgeführt sind, bei dem grössere Differenzen, als bei irgend einem anderen der untersuchten Stäbe aufgetreten sind. Vorausgeschickt muss nur noch werden, dass der Widerstand des Elatons bei t^0 C. durch Vergleichung bei verschiedenen Temperaturen mit einem Siemens'schen Etalon nach der Methode der Wheatstone'schen Brücke sich ergeben hatte

$$= 0{,}1045 \ \bigl(1 + \alpha(t - 15)\bigr) \text{ S.-E., wo } \alpha = 0{,}003\,783.$$

Nr. des Versuchs	Temperatur t	Widerstand w_t beobachtet	berechnet	Differenz
1	29,23	0,001 239	0,001 239	0
2	28,97	1 238	1 238	0
3	28,84	1 238	1 237	+1
4	25,64	1 226	1 223	+3
5	25,57	1 224	1 222	+2
6	25,53	1 224	1 222	+2
7–9	23,30	1 209	1 212	–3
10–12	21,75	1 201	1 204	–3
13–15	19,15	1 196	1 192	+4

Die berechneten Werthe von w_t sind nach der Formel:

$$w_t = 0{,}001\,174\,(1 + \alpha(t - 15)), \qquad \alpha = 0{,}003\,893$$

ermittelt, die aus den beobachteten nach der Methode der kleinsten Quadrate abgeleitet ist.

Die Länge dieses Bleistabes, l, war 142,0 mm, sein absolutes Gewicht 41,67 g, seine Dichtigkeit bei 15° C. 11,294. Ist a die Seite seines quadratischen Querschnittes, so ergibt sich hieraus $a^2 = 26{,}00$ und, nach der schon citirten theoretischen Untersuchung[1]), die electrische Leitungsfähigkeit bei 15° C., $\varkappa_{15}$, diejenige des Quecksilbers bei 0° gleich 1 gesetzt:

$$= \frac{l - 0{,}7272\,a}{w_{15}\,a^2} = 4{,}530.$$

In der folgenden Tabelle sind die auf dieselbe Weise bestimmten Leitungsfähigkeiten, $\varkappa_{15}$, für die anderen untersuchten Stäbe enthalten. Hinzugefügt ist für jeden Stab die von uns ermittelte Dichtigkeit bei der Temperatur von 15° C., μ_{15}, und eine Angabe über die Lage, die seine Axe, bevor er ausgeschnitten war, in dem Metallwürfel gehabt hatte; dabei ist ein Coordinatensystem benutzt, dessen Axen mit drei Würfelkanten zusammenfallen, und zwar hatte bei den Versuchen, die über die Wärmeleitung des Würfels angestellt waren, die x-Axe die vertical aufwärts gekehrte Richtung, und die z-Axe ging von der Seitenfläche, die bespritzt wurde, nach der gegenüberliegenden. In einigen Fällen konnten wir nur Grenzen für die betreffenden Coordinaten anführen.

1) G. Kirchhoff, Berl. Ber. 1880. p. 601; ges. Abh. p. 66.

Metalle	Stab-Nr.	Lage des Stabes im Metallwürfel			$\varkappa_{15}$	μ_{15}
Eisen I	1	$x=137$	y zwischen 3 u. 20	$z=0-140$	6,744	7,800
	2		wie 1		6,735	7,810
	3	$x=0-140$	$y=73$	$z=73$	6,708	7,764
	4	$x=0-140$	$y=73$	$z=65$	6,643	7,778
	5	$x=63$	$y=78$	$z=0-140$	6,803	7,789
Eisen II	1	$x=137$	$y=0-140$	z zw. 120 u. 137	4,121	7,815
	2		wie 1		4,151	7,816
	3	$x=65$	$y=65$	$z=0-140$	4,082	7,818
	4	$x=65$	$y=72$	$z=0-140$	4,037	—
Eisen III	1	$x=137$	$y=0-140$	z zw. 120 u. 137	6,871	7,836
	2		wie 1		7,119	7,832
	3	$x=65$	$y=72$	$z=0-140$	6,577	7,821
	4	$x=65$	$y=65$	$z=0-140$	6,561	7,821
Blei	1	$x=137$	$y=0-140$	z zw. 120 u. 137	4,538	11,310
	2		wie 1		4,530	11,294
	3		wie 1		4,527	—
	4	$x=65$	$y=65$	$z=0-140$	4,568	11,324
	5	$x=65$	$y=72$	$z=0-140$	4,569	11,315
Zinn	1	$x=137$	$y=0-140$	z zw. 120 u. 137	7,938	7,309
	2		wie 1		8,032	7,308
	3		wie 1		7,896	—
	4	$x=65$	$y=65$	$z=0-140$	8,837	7,306
	5	$x=65$	$y=72$	$z=0-140$	8,808	7,306
Zink	1	$x=137$	y zwischen 3 u. 20	$z=0-140$	14,64	7,187
	2		wie 1		14,50	7,185
	3		wie 1		14,28	—
	4	$x=68$	$y=65$	$z=0-140$	14,80	7,155
	5	$x=68$	$y=72$	$z=32-140$	14,85	7,161
Kupfer	1	$x=137$	y zwischen 3 u. 20	$z=0-140$	21,67	8,891
	2		wie 1		22,23	8,886
	3		wie 1		21,42	—
	4	$x=90$	$y=50$	$z=0-140$	24,04	8,882
	5	$x=69$	$y=67$	$z=0-140$	24,06	8,888
	6	$x=69$	$y=73$	$z=0-140$	24,01	8,886

Wie aus dieser Tabelle ersichtlich ist, weichen die Werthe der Leitungsfähigkeit für die verschiedenen Stäbe desselben

Metalls sehr erheblich von einander ab, während die Dichtigkeiten nur unbedeutende Unterschiede darbieten. Der Mangel an Homogenität, der hierin sich zeigt, trat auffallender noch bei Versuchen hervor, bei welchen wir die electrische Leitungsfähigkeit verschiedener Theile derselben Stäbe gemessen haben. Es wurde bei diesen der zu untersuchende Stab stückweise verkürzt, nach jeder Verkürzung sein Widerstand gemessen und aus dem Widerstande, der Länge und dem aus dem Gewichte ermittelten Querschnitt vor und nach jeder Verkürzung die Leitungsfähigkeit des abgetrennten Stückes berechnet. So ergab sich:

für den Kupferstab Nr. 6

für z = 0—10,1	10,1—20,2	20,2—30,1	30,1—40,1	40,1—50,1	50,1—60,2
$\varkappa_{15}$ = 20,98	21,86	22,75	23,83	25,33	26,39

für z =	60,2—70,2	70,2—140,2
$\varkappa_{15}$ =	26,18	24,25

für den Zinnstab Nr. 5

für z = 0—10,3	10,3—20,5	20,5—30,5	30,5—50,5	50,5—70,4	70,4—140,4
$\varkappa_{15}$ = 9,501	8,876	8,943	9,036	8,574	8,760

für den Zinnstab Nr. 4

für z =	130,3—140,4	109,8—130,3	69,4—109,8	0—69,4
$\varkappa_{15}$ =	9,139	8,908	8,806	8,798

für den Eisenstab III Nr. 3

für z =	0—20,3	20,3—50,1	50,1—70,9	70,9—140,2
$\varkappa_{15}$ =	6,841	6,829	6,236	6,510

für den Zinkstab Nr. 4

für z =	0—19,9	19,9—39,9	39,9—59,9	59,9—70,1	70,1—140,3
$\varkappa_{15}$ =	14,43	14,54	14,74	14,72	15,02

für den Bleistab Nr. 4

für z =	0—19,7	19,7—39,4	39,4—59,2	59,2—69,1	69,1—140,6
$\varkappa_{15}$ =	4,643	4,677	4,517	4,461	4,539

Eine Controle für diese Zahlen erhält man, indem man durch Mittelnehmen aus ihnen die mittleren Leitungsfähigkeiten der einzelnen Stäbe berechnet und diese vergleicht mit den direct gefundenen Werthen derselben. Die Mittel sind:

24,08	8,847	8,840	6,586	14,81	4,565

und die direct gemessenen Leitungsfähigkeiten, der obigen Tabelle zufolge:

24,01 8,808 8,837 6,577 14,80 4,568

Wie man sieht, steigen bei dem Kupferstabe die Differenzen der Leitungsfähigkeit bis zu 25 Proc. ihres Werthes. Wegen Mangels an Homogenität der benutzten Würfel erlauben daher unsere Versuche nicht mit der Sicherheit, die zu erreichen wir gehofft hatten, die Frage zu entscheiden, ob das Verhältniss der Leitungsfähigkeiten für Wärme und Electricität bei den untersuchten Metallen ein constantes ist, da die Mittelwerthe der beiden Leitungsfähigkeiten, welche unsere Methoden ergeben, von verschiedener Art sind. Will man aus den Versuchen mit der grösstmöglichen Wahrscheinlichkeit die Frage beantworten, so muss man ohne Zweifel die für die Wärmeleitungsfähigkeit gefundenen Werthe mit denjenigen Werthen der electrischen Leitungsfähigkeit combiniren, welche für Stäbe gelten, die aus den Würfeln nach der Mitte in der Richtung der x-Axe ausgeschnitten sind. Die folgende Zusammenstellung enthält für diese Stäbe die Mittel der electrischen Leitungsfähigkeiten $\varkappa_{15}$, die Dichtigkeiten μ_{15}, die specifischen Wärmen nach Bède[1]) s_{15}, die Temperaturleitungsfähigkeiten a_{15}, die Wärmeleitungsfähigkeiten k_{15} und die Verhältnisse der Leitungsfähigkeiten für Wärme und Electricität, alles für 15° C.

Metalle	$\varkappa_{15}$	μ_{15}	s_{15}	a_{15}	k_{15}	$\frac{k_{15}}{\varkappa_{15}}$
Eisen I Stab 5	6,803	7,789	0,1074	16,94	14,18	2,08
Eisen II Stab 3 u. 4 .	4,060	7,818	0,1074	11,48	9,64	2,37
Eisen III Stab 3 u. 4 .	6,569	7,821	0,1074	16,37	13,75	2,09
Blei. Stab 4 u. 5 . . .	4,569	11,320	0,0292	23,99	7,93	1,74
Zinn. Stab 4 u. 5 . . .	8,823	7,306	0,0513	38,60	14,46	1,64
Zink. Stab 4 u. 5 . . .	14,83	7,158	0,0878	40,49	25,45	1,72
Kupfer. Stab 5 u. 6 .	24,04	8,887	0,0917	50,95	41,52	1,73

Die Zahlen der letzten Columne scheinen zu zeigen, dass das Verhältniss der beiden Leitungsfähigkeiten für Wärme und Electricität im allgemeinen bei den verschiedenen Metallen

1) Bède, Fortschritte der Physik. p. 379. 1855.

denselben Werth besitzt, beim Eisen aber ein anderes ist. Vielleicht hängt diese Ausnahmestellung des Eisens mit seinen magnetischen Eigenschaften zusammen.[1])

Zu diesem Schlusse waren wir gekommen, als eine Arbeit[2]) von Hrn. H. F. Weber in Zürich erschien, die auf denselben Gegenstand sich bezieht und zu einem wesentlich anderen Resultate gelangt. Hr. Weber findet nämlich, dass das Verhältniss zwischen den Leitungsfähigkeiten für Wärme und Electricität bei den Metallen nicht constant ist, sondern eine lineare Function des Productes aus specifischer Wärme und Dichtigkeit oder der „specifischen Wärme der Volumeneinheit", wie er dieses Product nennt. Bei Zugrundelegung gewisser, von den unserigen theilweise verschiedener Einheiten erhält er:

$$\frac{k_0}{\varkappa_0} = 0{,}0877 \,.\, 10^4 + 0{,}1360 \,.\, 10^4 c_0,$$

wo k_0 die Leitungsfähigkeit für Wärme, $\varkappa_0$ diejenige für Electricität und c_0 die specifische Wärme der Volumeneinheit für 0^0 C. bezeichnet, und diese Gleichung stellt mit überraschender Genauigkeit seine an 10 verschiedenen Metallen ausgeführten Messungen dar, bei denen c_0 von 0,827 bis 0,293 variirt.

Um wo möglich den Grund der auffallenden Abweichungen unserer Versuchsresultate von dem Weber'schen Gesetze zu finden, haben wir zwei der von uns benutzten Metalle, nämlich Zink und Blei, einer weiteren Untersuchung unterworfen. Wir wählten diese Metalle, weil bei ihnen der Mangel an Homogenität sich weniger gross, als bei den übrigen (abgesehen vom Eisen) gezeigt hatte, und zugleich die specifische Wärme der Volumeneinheit bei ihnen recht verschiedene Werthe besitzt.

---

1) Einige Versuche, die wir über das magnetische Verhalten der drei Eisensorten angestellt haben, zeigten, dass die Coërcitivkraft bei den Sorten I und III, für die das Verhältniss $k/\varkappa$ das gleiche war, denselben Werth besass, bei der Sorte II aber, für welche $k/\varkappa$ erheblich grösser sich ergeben hatte, viel bedeutender war.

2) H. F. Weber, Monatsber. der Acad. der Wissensch. zu Berlin, Mai 1880.

Wir veranlassten zunächst eine chemische Analyse derselben, die in dem Laboratorium der landwirthschaftlichen Academie zu Berlin unter Leitung des Hrn. Landolt ausgeführt ist. An fremden Bestandtheilen ergaben sich dabei im Zink:

Zinn	0,9406 Proc.	Arsen	0,0283 Proc.
Blei	0,7212 „	Cadmium	0,0099 „
Kupfer	0,0785 „	Eisen	0,0061 „
Antimon	0,0313 „		

und quantitativ nicht bestimmbare Spuren von Mangan und Schwefel; im Blei:

Antimon	0,1399 Proc.	Eisen	0,0032 Proc.
Kupfer	0,0515 „	Wismuth	0,0027 „
Zink	0,0222 „	Cadmium	0,0023 „

und quantitativ nicht bestimmbare Spuren von Silber, Mangan und Arsen.

Hr. Weber hat sein Gesetz nur für metallische Körper aufgestellt; wir hatten es für möglich gehalten, dass in unseren Würfeln von Zink und Blei so viel von nicht-metallischen Körpern sich befände, dass infolge hiervon das Weber'sche Gesetz bei ihnen nicht zuträfe; diese Vermuthung ist als durch die Analyse widerlegt anzusehen.

Wir haben ferner die specifische Wärme unserer beiden Metalle mit Hülfe des Bunsen'schen Eiscalorimeters bestimmt, um die Gültigkeit der Bède'schen Angaben für dieselben zu controliren. Um die specifische Wärme bei 15° C. berechnen zu können, erwärmten wir den zu untersuchenden Körper, bevor er in das Calorimeter gebracht wurde, bei einigen Versuchen auf die Temperatur der Dämpfe siedenden Wassers, bei anderen auf eine niedrigere, scharf messbare Temperatur. Wir haben hierbei eine Methode benutzt, ein Wasserbad längere Zeit auf einer constanten Temperatur zu erhalten, die sich als recht zweckmässig erwiesen hat, und die deshalb beschrieben werden möge.

Das warme Wasser befand sich in einem oben mit einer Abflussröhre versehenen cylindrischen Gefäss von Zinkblech von etwa 25 cm Höhe und 20 cm Weite, das doppelte Wandungen besass, deren Zwischenraum mit gebrannter Infusorien-

erde ausgefüllt war. In ihm war eine rotirende Rührvorrichtung angebracht, die durch einen Wassermotor in Bewegung erhalten wurde und bewirkte, dass eintretende Temperaturverschiedenheiten sehr schnell sich ausgleichen mussten. Ferner tauchten in das Wasser, vor der Berührung mit ihm durch ein Messingröhrchen geschützt, die Löthstellen gerader oder ungerader Ordnungszahl einer Thermosäule, die aus Eisen- und Neusilberdrähten bestand, und deren übrige Löthstellen durch Schnee auf 0° C. erhalten wurden. Die Löthstellen einer zweiten Thermosäule, die aus eben solchen Drähten bestand, aber weniger Elemente enthielt, tauchten in ähnlicher Weise einerseits in einen von den Dämpfen siedenden Wassers umspülten Raum, andererseits in Schnee. Diese beiden Thermosäulen waren mit einem sehr empfindlichen, aperiodischen Galvanometer so zu einem Kreise verbunden, dass sie einander entgegenwirkten. Durch einen Kautschukschlauch, der mit Hülfe einer Klemmvorrichtung leicht geschlossen und geöffnet werden konnte, communicirte das Zinkgefäss mit einem höher stehenden Kessel, welcher siedendes Wasser enthielt. Durch Handhabung dieser Klemmvorrichtung suchte der Beobachter am Galvanometer die Nadel in derjenigen Stellung zu erhalten, die sie bei geöffnetem Kreise hatte, und das gelang leicht soweit, dass die Ablenkung nie mehr als einige wenige Scalentheile betrug; eine solche Ablenkung entsprach, wenn der Barometerstand derselbe blieb, einer Temperaturänderung des Wassers von weniger als 0,01° C. Gemessen wurde die Temperatur des Wassers an einem Luftthermometer, dessen Gefäss in demselben sich befand. Um eine Temperatur von etwa 50° C. zu erhalten, wurde einerseits eine Thermosäule von zwei Elementen, andererseits ein einzelnes Element benutzt; um dem Wasser eine Temperatur von etwa 67° C. zu geben, mussten Thermosäulen von drei und zwei Elementen angewandt werden.[1])

1) Eine solche Anordnung würde sehr zweckmässig sein zur Prüfung der von Hrn. Avenarius aufgestellten Beziehung zwischen der electromotorischen Kraft einer Thermokette und den Temperaturen ihrer Löthstellen.

So fanden wir für Zink:

$$s_t = 0{,}091\,71\ (1 + 0{,}000\,27\,t)$$

und für Blei:

$$s_t = 0{,}030\,14\ (1 + 0{,}000\,54\,t),$$

wenn die mittlere specifische Wärme des Wassers zwischen 0 und 100° C. als Einheit angenommen wird. Daraus folgt die specifische Wärme bei 15° C., s_{15}:

für Zink = 0,0921, für Blei = 0,0304,

während sie nach Bède:

= 0,0878 und = 0,0292

sein sollte. Obwohl jene Zahlen von diesen nicht unerheblich abweichen, so ergeben doch die einen wie die anderen das Verhältniss $k_{15}/\varkappa_{15}$ als nahe gleich für die beiden Metalle.

Wir stellen in der folgenden Tafel die von Hrn. Weber für Zink und Blei gemachten Angaben mit den entsprechenden von uns gefundenen Werthen zusammen, die auf die von Hrn. Weber benutzten Einheiten reducirt sind, indem die Leitungsfähigkeit des Quecksilbers = $1{,}047 \cdot 10^{-5}$, wie er sie gefunden hatte, gesetzt ist.

	Zink		Blei	
	Weber	K. und H.	Weber	K. und H.
c_0	0,662	0,657	0,340	0,342
k_0	0,3056	0,2662	0,0719	0,0853
$\varkappa_0$	$17{,}43 \cdot 10^{-5}$	$16{,}41 \cdot 10^{-5}$	$5{,}351 \cdot 10^{-5}$	$5{,}082 \cdot 10^{-5}$
$k_0/\varkappa_0$	$0{,}1753 \cdot 10^4$	$0{,}1622 \cdot 10^4$	$0{,}1345 \cdot 10^4$	$0{,}1678 \cdot 10^4$

Den Grund der Unterschiede, die hier sich zeigen, haben wir in unserer Arbeit nicht finden können. Ob die Versuche und Rechnungen, durch welche Hr. Weber zu seinen Resultaten gelangt ist, einwurfsfrei sind, können wir nicht beurtheilen, da der Auszug aus seiner Arbeit, der allein veröffentlicht ist, die Handhaben hierzu nicht darbietet. Nicht gerechtfertigt aber finden wir die Art, wie Hr. Weber die Zahlen, die Hr. F. Neumann[1]) bei seinen Versuchen über

1) Neumann, Ann. de chim. et de phys. (3) **66.** p. 185. 1862.

die Wärmeleitung in Metallen erhalten hat, als Bestätigung seiner eigenen hinstellt. Aus jenen Zahlen berechnet er die Constanten a und b seiner Formel:

$$\frac{k}{\varkappa} = a + b \, . \, c \, .$$

Die absoluten Werthe derselben lassen einen Vergleich mit den aus seinen eigenen Versuchen abgeleiteten nicht zu, da Hr. Neumann für die electrischen Leitungsfähigkeiten eine nicht genau bestimmbare Einheit benutzt hat; das Verhältniss beider, das von dieser Einheit unabhängig ist, findet er nach Neumann = 1,545, während seine eigenen Versuche es = 1,550 ergeben hatten. Die fast völlige Gleichheit dieser Zahlen scheint in schlagender Weise den Ausspruch des Hrn. Weber zu rechtfertigen, dass die Ergebnisse des Hrn. Neumann in guter Uebereinstimmung mit den seinigen sind, und eine wichtige Bestätigung der letzteren zu gewähren. Erwägt man aber, auf welchem Wege die Zahl 1,545 berechnet ist, und mit wie geringer Genauigkeit die Neumann'schen Resultate durch die Weber'sche Formel dargestellt werden, so zeigt sich jene Gleichheit als ein Zufall, dem eine Bedeutung nicht beizulegen ist. Die Neumann'schen Versuche beziehen sich auf die Metalle:

Kupfer, Messing, Neusilber, Eisen und Zink

und ergeben für das Verhältniss $k/\varkappa$ die Werthe[1]):

17,5	19,8	19,9	18,9	17,1.

Als entsprechende Werthe von c benutzt Hr. Weber:

0,83	0,80	0,80	0,84	0,67.

Für die vier ersten Metalle setzt er nun $k/\varkappa$ und c gleich den Mittelwerthen 19,05 und 0,82 und berechnet aus diesen und den für Zink angegebenen Zahlen a und b. Er findet so $a = 8{,}4$, $b = 13{,}0$, woraus er schliesst $b/a = 1{,}545$. Berechnet man aber rückwärts mit diesen Werthen von a und b das Verhältniss $k/\varkappa$ für die fünf Metalle, so ergibt sich:

19,2	18,8	18,8	19,3	17,1.

1) Dieses ist die Angabe von Hrn. Weber; statt der Zahl 17,5 steht in der Abhandlung des Hrn. Neumann 17,6, und die Division der dort angeführten Leitungsfähigkeiten gibt 17,8.

Bei der Grösse der Differenzen zwischen diesen Zahlen und den von Hrn. Neumann gefundenen ist auf die Uebereinstimmung der Verhältnisse 1,545 und 1,550 ein Gewicht nicht zu legen. Aus den eigenen Versuchen hat Hr. Weber die Werthe von a und b nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet; behandelt man die Neumann'schen Versuche ebenso, so ergibt sich aus ihnen $b/a = 0{,}84$ statt $= 1{,}550$.

---

2. Bemerkungen zu dem Aufsatze des Herrn Voigt „Theorie des leuchtenden Punktes"; von G. Kirchhoff.

(Abdruck a. d. „Journal für die reine und angewandte Mathematik", Bd. 90. p. 34.)

In meiner „Mechanik" (Vorlesung 23, § 4) habe ich die Bewegung einer compressibeln Flüssigkeit behandelt, die durch unendlich kleine Bewegungen einer in dieser befindlichen, starren Kugel hervorgerufen wird. Dieser Aufgabe sehr ähnlich ist die Aufgabe, die Herr Voigt in seiner „Theorie des leuchtenden Punktes" überschriebenen Abhandlung gelöst hat; die Methode, die ich dort benutzt habe, ist auch hier anwendbar und führt viel schneller zum Ziele, als der Weg, den Herr Voigt eingeschlagen hat.

Herr Voigt denkt sich ein festes, isotropes, elastisches Mittel, das nach allen Richtungen sich in die Unendlichkeit erstreckt und eine starre Kugel umgibt, an deren Oberfläche es derart haftet, dass keine relativen Verschiebungen hier stattfinden; er untersucht dann die Bewegung des Mittels unter der Voraussetzung, dass die Kugel gegebene, unendlich kleine Schwingungen macht; er führt die Rechnung für die beiden Fälle durch, dass die Kugel entweder um einen ihrer Durchmesser sich dreht oder, ohne sich zu drehen, in gerader Linie hin und hergeht; auf diese beiden Fälle lässt jeder andere sich reduciren.

Es seien u, v, w die Componenten der Verrückung zur Zeit t eines materiellen Punktes des elastischen Mittels, der

beim Gleichgewichtszustande die Coordinaten x, y, z hat; dann ist, wie Clebsch im 61. Bande dieses Journals gezeigt hat,

$$u = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z},$$
$$v = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x},$$
$$w = \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y},$$

wo P eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = a^2 \Delta P$$

ist, und U, V, W Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = b^2 \Delta \varphi$$

sind, wenn

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Wellen, b die Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler Wellen ist.

Man kommt auf den ersten der beiden von Herrn Voigt behandelten Fälle, wenn man diese Gleichungen in die folgenden specialisirt:

$$u = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad w = 0,$$

$$W = \frac{1}{r} F(r - bt),$$

wo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ist und F eine unbestimmte Function des zugesetzten Arguments bedeutet. Bei der durch diese Gleichungen dargestellten Bewegung behalten die Theilchen, die beim Gleichgewichtszustande auf einer mit dem beliebigen Radius r beschriebenen Kugelfläche liegen, stets ihre relative Lage bei, während diese Kugelfläche sich so um die z-Axe dreht, dass ihr Drehungswinkel zur Zeit t

$$\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r}$$

ist. Ist nun in dem elastischen Mittel eine starre Kugel vorhanden, deren Oberfläche die Gleichung $r = R$ hat, und die

um die z-Axe so sich dreht, dass $f(t)$ ihr Drehungswinkel zur Zeit t ist, so muss für $r = R$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} = f(t)$$

oder, da

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -b\frac{\partial F}{\partial r}$$

ist,

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{b}{r}F = -br^2 f(t)$$

sein. Hieraus folgt, wenn über die Constante der Integration auf gewisse Weise verfügt wird,

$$F(R-bt) = -bR^2 e^{-\frac{bt}{R}}\int_0^t dt\, e^{\frac{bt}{R}} f(t).$$

Setzt man hier $t + \frac{R-r}{b}$ an Stelle von t und dividirt durch r, so ergibt sich

$$W = -\frac{bR^2}{r}e^{-\frac{bt+R-r}{R}}\int_0^{t+\frac{R-r}{b}} dt\, e^{\frac{bt}{R}} f(t).$$

Nimmt man an, dass $f(t)$ verschwindet, wenn $t < 0$ ist, so verschwinden für $t = 0$ und $r > R$ hiernach W und $\frac{\partial W}{\partial t}$, also auch u, v, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$. Der für W aufgestellte Ausdruck setzt also voraus, dass alle Theilchen des elastischen Mittels zur Zeit $t = 0$ in ihren Gleichgewichtslagen ruhen. Aus diesem Ausdruck folgt unmittelbar (abgesehen von der Verschiedenheit der Bezeichnung) für den Drehungswinkel $\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}$ der von Hrn. Voigt in seiner Gleichung (9.) angegebene Werth.

Etwas verwickelter ist die Rechnung für den zweiten der von Hrn. Voigt behandelten Fälle. Für ihn hat man zu setzen

$$P = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad U = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial S}{\partial x}, \quad W = 0,$$

$$Q = \frac{1}{r}F(r-at), \quad S = \frac{1}{r}G(r-bt),$$

und die Functionen F und G passend zu bestimmen. Bei dieser Annahme ist

$$u = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial z} = \frac{xz}{r^2}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r}\right),$$

$$v = \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} = \frac{yz}{r^2}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r}\right),$$

$$w = \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{z^2}{r^2}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r}\right)$$
$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r}.$$

Soll nun für $r = R$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = f(t)$$

sein, so wird dem genügt, wenn für diesen Werth von r

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r} = f(t),$$

d. h.

$$\frac{3}{r^3}F - \frac{3}{r^2}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{3}{r^3}G - \frac{3}{r^2}\frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} = 0$$

$$-\frac{1}{r^3}F + \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial r} \qquad -\frac{1}{r^3}G + \frac{1}{r^2}\frac{\partial G}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} = f(t)$$

ist. Erwägt man, dass aus diesen Gleichungen folgt

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 3f(t),$$

und führt man statt der Differentialquotienten nach r diejenigen nach t ein, so findet man zur Bestimmung der Functionen $F(R-at)$ und $G(R-bt)$ die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{2}{b^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 3Rf(t),$$

$$3F + \frac{3R}{a}\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{R^2}{a^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 3G + \frac{3R}{b}\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{R^2}{b^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 0.$$

Die erste von diesen gibt, wenn man über die Constanten der Integration passend verfügt,

$$F(R - at = 2\frac{a^2}{b^2}G(R-bt) + 3a^2 R\int_0^t dt\int_0^t dt\, f(t);$$

und die zweite wird in Folge hierven

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \frac{2a+b}{R}\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{2a^2+b^2}{R^2} G = b^2 R g(t),$$

wo

$$g(t) = f(t) + \frac{3a}{R}\int_0^t dt\, f(t) + \frac{3a^2}{R^2}\int_0^t dt \int_0^t dt\, f(t).$$

Sie wird erfüllt durch

$$G(R - bt) = \frac{b^2 R}{\lambda_2 - \lambda_1}\left\{e^{\lambda_1 t}\int_0^t dt\, g(t)\, e^{-\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\int_0^t dt\, g(t)\, e^{-\lambda_2 t}\right\},$$

wo λ_1 und λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 + \frac{2a+b}{R}\lambda + \frac{2a^2+b^2}{R^2} = 0$$

bedeuten. Hiermit sind $G(R-bt)$ und $F(R-at)$ bestimmt; setzt man in ihren Ausdrücken $t + \frac{R-r}{b}$ und $t + \frac{R-r}{a}$ an Stelle von t, so findet man $G(r-bt)$ und $F(r-at)$, mithin auch Q und S. Nimmt man an, dass $f(t)$ für alle negativen Werthe von t verschwindet, so verschwinden für $t < 0$ und $r > R$ die Grössen Q, S, $\frac{\partial Q}{\partial t}$, $\frac{\partial S}{\partial t}$, also auch u, v, w, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$; die aufgestellten Formeln gelten daher für den Fall, dass das elastische Mittel bis zum Augenblicke $t = 0$ sich in Ruhe befindet.

Hr. Voigt hat seine Betrachtungen auf den Fall beschränkt, dass das Mittel incompressibel, also a unendlich gross ist. Unter dieser Voraussetzung werden die beiden Differentialgleichungen, die zur Bestimmung von $F(R-at)$ und $G(R-bt)$ dienen,

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\tfrac{3}{2} b^2 R f(t),$$

$$3F + 3G + \frac{3R}{b}\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{R^2}{b^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 0;$$

daraus findet man

$$S = -\tfrac{3}{2}\frac{b^2 R}{r}\int_0^{t+\frac{R-r}{b}} dt \int_0^t dt\, f(t),$$

$$Q = \tfrac{3}{2}\frac{b^2 R}{r}\left\{\int_0^t dt \int_0^t dt\, f(t) + \frac{R}{b}\int_0^t dt\, f(t) + \tfrac{1}{3}\frac{R^2}{b^2} f(t)\right\},$$

und hieraus folgen dieselben Werthe der Verrückungen, die Hr. Voigt in den Gleichungen (26.) seiner Abhandlung angegeben hat.

Berlin, im April 1880.

---

3. Zur Theorie der Lichtstrahlen; von G. Kirchhoff.

Sitzber. d. k. Acad. d. Wissensch. zu Berlin vom 22. Juni 1882. p. 641. Wied. Ann. Bd. 18. p. 663. 1883.

Die Schlüsse, durch welche man, hauptsächlich gestützt auf Betrachtungen von Huygens und Fresnel, die Bildung der Lichtstrahlen, ihre Reflexion und Brechung, sowie die Beugungserscheinungen zu erklären pflegt, entbehren in mehrfacher Beziehung der Strenge. Eine vollkommen befriedigende Theorie dieser Gegenstände aus den Hypothesen der Undulationstheorie zu entwickeln, scheint auch heute noch nicht möglich zu sein; doch lässt sich jenen Schlüssen eine grössere Schärfe geben. Ich erlaube mir, der Academie Auseinandersetzungen vorzulegen, welche hierauf abzielen, und deren wesentlichen Inhalt ich in meinen Universitätsvorlesungen seit einer Reihe von Jahren vorgetragen habe. Das gleiche Ziel in Bezug auf die Beugungserscheinungen ist inzwischen in einigen veröffentlichten Abhandlungen von den Herren Fröhlich[1]) und Voigt[2]) verfolgt.

§ 1. Es soll angenommen werden, dass das Licht in Transversalschwingungen des Aethers besteht, und der Aether in Bezug auf diese in dem Mittel, in dem die Lichtbewegung betrachtet wird, sich wie ein fester elastischer, isotroper und homogener Körper verhält, auf dessen Theile keine anderen Kräfte wirken, als die durch die relativen Verrückungen hervorgerufenen. Sind u, v, w die Componenten nach den Coor-

---

1) Fröhlich, Wied. Ann. **3.** p. 376. 1878; **6.** p. 414. 1879 und **15.** p. 592. 1881.

2) Voigt, Wied. Ann. **3.** p. 532. 1878.

dinatenaxen der Verrückung eines Aethertheilchens, dessen Gleichgewichtslage die Coordinaten x, y, z hat, zur Zeit t, so genügt dann jede dieser Grössen der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi, \tag{1}$$

wo Δ die Summe der zweiten Differentialquotienten nach x, y, z, und a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes bedeutet. Doch dürfen nicht beliebige Lösungen dieser Gleichung u, v, w gleichgesetzt werden, da auch:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

sein muss. Sind U, V, W beliebige Lösungen derselben, so entspricht aber:

$$u = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \tag{2}$$

einer möglichen Lichtbewegung, und umgekehrt gibt es für jede Lichtbewegung Functionen U, V, W, die diesen Gleichungen genügen.[1] Es soll im Folgenden unter φ eine der Grössen U, V, W oder u, v, w verstanden werden. T sei die Schwingungsdauer des als homogen vorausgesetzten Lichtes, dann ist jede dieser sechs Grössen eine lineare, homogene Function von:

$$\cos\frac{t}{T}2\pi \quad \text{und} \quad \sin\frac{t}{T}2\pi.$$

Als Maass für die Intensität des Lichtes im Punkte (x, y, z) soll das arithmetische Mittel der Werthe genommen werden, welche:

$$u^2 + v^2 + w^2$$

während der Zeit T erhält, d. h. wenn man:

$$u = \mathfrak{u}\cos\frac{t}{T}2\pi + \mathfrak{u}'\sin\frac{t}{T}2\pi, \quad v = \mathfrak{v}\cos\frac{t}{T}2\pi + \mathfrak{v}'\sin\frac{t}{T}2\pi,$$

$$w = \mathfrak{w}\cos\frac{t}{T}2\pi + \mathfrak{w}'\sin\frac{t}{T}2\pi$$

setzt, $\quad \frac{1}{2}(\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{u}'^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{v}'^2 + \mathfrak{w}^2 + \mathfrak{w}'^2).$

Ist der ganze unendliche Raum von dem betrachteten Medium erfüllt, befindet sich in demselben ein leuchtender

1) Clebsch in Borchard's Journ. 61. p. 195. 1862.

Punkt an dem Orte des Punktes 1, dessen Coordinaten x_1, y_1, z_1 sind, und zeichnet man durch r_1 den Abstand der Punkte (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) von einander, durch λ die Wellenlänge des Lichtes, d. h. das Product aT, so ist die einfachste Annahme, die man über φ machen kann, und die erlaubt ist, wenn man unter φ eine der drei Grössen U, V, W versteht:

$$\varphi = \frac{1}{r_1} \cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi. \tag{3}$$

Aus diesem Ausdruck von φ kann man einen allgemeineren, der auf denselben Fall sich bezieht, ableiten, indem man zu ihm einen constanten Factor, zu t eine additive Constante hinzufügt, nach x_1, y_1 oder z_1 einmal oder wiederholt differentiirt und die Summe so gebildeter Ausdrücke nimmt. Das Resultat dieser Operation vereinfacht sich wesentlich, wenn man die Annahme einführt, die für die Optik von fundamentaler Bedeutung ist, dass die Wellenlänge λ als unendlich klein betrachtet werden darf. Man erhält dadurch, indem man nur die Glieder höchster Ordnung berücksichtigt:

$$\varphi = \frac{D}{r_1} \cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi + \frac{D'}{r_1} \sin\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi, \tag{4}$$

wo D und D' von $\partial r / \partial x_1$, $\partial r_1 / \partial y_1$, $\partial r_1 / \partial z_1$, oder, was dasselbe ist, von $\partial r_1 / \partial x$, $\partial r_1 / \partial y$, $\partial r_1 / \partial z$, d. h. von der Richtung der Linie r_1 abhängen, im übrigen aber constant sind. Ausdrücke von derselben Form gelten dann nach (2) auch für u, v, w; bezeichnet man die Werthe von D und D' für den Fall, dass $\varphi = u$, $= v$ oder $= w$ gesetzt wird, durch A, A', B, B' oder C, C', lässt also diese sechs Zeichen Grössen bedeuten, die von der Richtung der Linie r_1 abhängen, im übrigen aber constant sind, so wird die Intensität des Lichtes im Punkte (x, y, z):

$$= \frac{1}{2 r_1^2} (A^2 + A'^2 + B^2 + B'^2 + C^2 + C'^2).$$

Dadurch ist ausgesprochen, dass diese Intensität dem Quadrate der Entfernung vom leuchtenden Punkte umgekehrt proportional ist, dabei aber mit der Richtung der Linie r_1 in einer Weise variirt, die durch die Bewegung im leuchtenden Punkte bedingt ist.

Ein leuchtender Punkt, wie der gedachte, soll bei den folgenden Betrachtungen als Lichtquelle vorausgesetzt, und es soll untersucht werden, wie das von ihm ausgehende Licht durch einen fremdartigen Körper, der in seine Nähe gebracht ist, modificirt wird. Ein wesentliches Hülfsmittel bei dieser Untersuchung wird ein Satz darbieten, den die Anwendung des Green'schen Satzes auf Functionen, die der für φ aufgestellten Differentialgleichung genügen, ergibt, und der eine Präcisirung und eine Verallgemeinerung des sogenannten Huygens'schen Principes bildet. Hr. Helmholtz hat denselben schon in seiner „Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden"[1]) abgeleitet und seine Wichtigkeit gezeigt; es soll dieser Satz auf einem anderen Wege und in einer anderen Form in dem folgenden Paragraphen entwickelt werden.

§ 2. Sind $\mathfrak{U}$ uud $\mathfrak{B}$ zwei Functionen von x, y, z, die mit ihren ersten Differentialquotienten nach x, y, z innerhalb eines vollständig begrenzten Raumes (der auch aus mehreren getrennten Theilen bestehen kann) eindeutig und stetig sind, ist $d\tau$ ein Element dieses Raumes, ds ein Element seiner Oberfläche (die gleichfalls aus getrennten Theilen zusammengesetzt sein kann) und N die nach dem Inneren des Raumes gerichtete Normale von ds, so ist nach dem Green'schen Satze:

$$\int ds\left(\mathfrak{U}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial N}-\mathfrak{B}\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial N}\right)=\int d\tau(\mathfrak{B}\Delta\mathfrak{U}-\mathfrak{U}\Delta\mathfrak{B}).$$

Hier setze man $\mathfrak{U}=\varphi$ und nehme in Bezug auf $\mathfrak{B}$ zunächst an, dass es auch der Gleichung (1) genügt. Man erhält dann:

$$\int ds\left(\varphi\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial N}-\mathfrak{B}\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)=\frac{1}{a^2}\int d\tau\left(\mathfrak{B}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\varphi\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial t^2}\right)$$

$$\text{oder}\quad=\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\int d\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\varphi\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}\right).$$

Diese Gleichung multiplicire man mit dt und integrire zwischen zwei Werthen der Zeit, von denen der eine negativ, der andere positiv ist, und die $-t'$ und t'' genannt werden mögen. Bei einer gebräuchlichen Bezeichnungsweise ergibt sich dadurch:

1) Helmholtz, Borchardt's Journ. 57. p. 1. 1859.

$$(5)\qquad \int\limits_{-t'}^{t''} dt \int ds\left(\varphi\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial N} - \mathfrak{B}\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right) = \frac{1}{a^2}\left[\int d\tau\left(\mathfrak{B}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}\right)\right]_{-t'}^{t''}.$$

Nun sei: $$\mathfrak{B} = \frac{F(r_0 + at)}{r_0},$$

wo r_0 die Entfernung des Punktes (x, y, z) von einem beliebig gewählten Punkte, dem Punkte o, bedeutet und F eine Function ist, die für jeden endlichen, positiven oder negativen, Werth ihres Argumentes verschwindet, nie negativ ist und der Bedingung genügt, dass:

$$(6)\qquad \int F(\zeta)\, d\zeta = 1,$$

wenn die Integration von einem endlichen negativen bis zu einem endlichen positiven Werthe von ζ ausgedehnt wird.

Es sei jetzt ein vollständig begrenzter Raum gegeben, der von homogenem Aether erfüllt und frei von leuchtenden Punkten ist; s sei seine Oberfläche und ds ein Element derselben. Der Punkt o werde im Inneren des Raumes angenommen und die Gleichung (5) auf den Raum angewandt, der von jenem übrig bleibt, wenn eine unendlich kleine Kugel, deren Mittelpunkt der Punkt o ist, ausgeschlossen wird. dS sei ein Element der Oberfläche dieser Kugel. Es sei t' so gross gewählt, dass:

$$r_0 - at'$$

für den grössten Werth, den r_0 in der Fläche s, also überhaupt in dem gedachten Raume, erhält, negativ und endlich ist; unter dieser Bedingung kommen auf der rechten Seite der Gleichung (5) nur Werthe von $\mathfrak{B}$ und $\partial\mathfrak{B}/\partial t$ vor, für welche $r_0 + at$ endlich, positiv oder negativ ist, und welche daher verschwinden. Die Gleichung (5) gibt daher:

$$(7)\qquad \int\limits_{-t'}^{t''} dt \int ds\left(\varphi\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial N} - \mathfrak{B}\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right) + \int\limits_{-t'}^{t''} dt \int dS\left(\varphi\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial N} - \mathfrak{B}\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right) = 0.$$

Das zweite von diesen beiden Integralen lässt sich ausführen. Bezeichnet man durch R den Radius der unendlich kleinen Kugel, auf die es sich bezieht, und vernachlässigt bei der Berechnung des mit dS multiplicirten Ausdrucks, was mit R^2 multiplicirt unendlich Kleines gibt, so kann man setzen:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial N} = -\frac{1}{R^2} F(at), \qquad \mathfrak{B} = 0,$$

also:

$$\int dS \left(\varphi \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial N} - \mathfrak{B} \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right) = -4 \varphi_0 F(at),$$

wo φ_0 den Werth von φ für den Punkt o bedeutet. Da ferner $F(at)$ nur für unendlich kleine Werthe von t von Null verschieden und der Gleichung (6) zufolge:

$$\int_{-t'}^{t''} dt F(at) = \frac{1}{a}$$

ist, so wird das zweite Glied der Gleichung (7):

$$-\frac{4\pi}{a} \varphi_0 (o),$$

wo $\varphi_0(o)$ den Werth von φ_0 für $t = 0$ bezeichnet. Auch bei ihrem ersten Gliede lässt sich die Integration nach t mit Hülfe der Gleichung (6) ausführen. Zunächst hat man:

$$a \int_{t'}^{t''} dt \mathfrak{B} \frac{\partial \varphi}{\partial N} = a \int_{-t'}^{t''} dt \frac{F(r_0 + at)}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial N},$$

wo in $\partial \varphi / \partial N$ nach Ausführung der Differentiation:

$$t = -\frac{r_0}{a}$$

zu setzen ist. Macht man:

(8)
$$\frac{\partial \varphi}{\partial N} = f(t),$$

so wird dieser Ausdruck also:

$$\frac{1}{r_0} f\left(-\frac{r_0}{a}\right).$$

Ferner ist:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial N} = \frac{\partial \frac{F(r_0 + at)}{r_0}}{\partial N} = \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N} F(r_0 + at) + \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial N} \frac{1}{a} \frac{\partial F(r_0 + at)}{\partial t},$$

und daher:

$$a \int_{-t'}^{t''} dt \varphi \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial N} = \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N} \varphi \left(-\frac{r_0}{a}\right) + \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial N} \int_{-t'}^{t''} \varphi \frac{\partial F(r_0 + at)}{\partial t} dt,$$

wo $\varphi(-r_0/a)$ den Werth von φ für $t = -r_0/a$ bedeutet.

Formt man das letzte Integral durch partielle Integration um und erwägt, dass die Function F für jeden endlichen Werth ihres Argumentes verschwindet, so findet man denselben Ausdruck:

$$= \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N} \varphi\left(-\frac{r_0}{a}\right) - \frac{1}{a}\frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

wo in $\partial\varphi/\partial t$ ebenfalls $t = -r_0/a$ zu setzen ist. Substituirt man diese Resultate in die Gleichung (7) und verlegt zugleich den Anfangspunkt der Zeit so, dass der bisherige Anfangspunkt der Zeitpunkt t wird, so erhält man:

$$(9) \quad 4\pi\varphi_0(t) = \int ds \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N}\varphi\left(t - \frac{r_0}{a}\right) - \frac{1}{a}\frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\frac{\partial \varphi\left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{\partial t} - \frac{1}{r_0} f\left(t - \frac{r_0}{a}\right)\right\}.$$

Die beiden ersten Glieder des hier mit ds multiplicirten Ausdruckes lassen sich in das eine:

$$\frac{\partial}{\partial N}\frac{\varphi\left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0}$$

zusammenziehen, wo die Differentiation so auszuführen ist, dass nur r_0 als variabel angesehen wird, den Grössen, von denen $\varphi(t)$ abhängt, aber die Werthe gelassen werden, die ihnen in dem Elemente ds zukommen. Man hat hiernach:

$$(10) \qquad 4\pi\varphi_0(t) = \int ds\, \Omega, \qquad \text{wo:}$$

$$(11) \qquad \Omega - \frac{\partial}{\partial N}\frac{\varphi\left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0} - \frac{f\left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0},$$

und wo die Function f durch (8) definirt ist.

Hieraus ist zu schliessen, dass die Bewegung des Aethers in dem von der Fläche s umschlossenen Raume angesehen werden kann als hervorgebracht von einer Schicht von leuchtenden Punkten in der Fläche s, da ein jedes von den beiden Gliedern, aus denen Ω zusammengesetzt ist, sich bezeichnen lässt als einem leuchtenden Punkte entsprechend, der am Orte von ds sich befindet.

Die folgende Betrachtung beweist, dass unter einer gewissen Bedingung, die später immer als erfüllt angenommen

werden soll, die Gleichung (10) auch gilt, wenn die leuchtenden Punkte innerhalb des von der Fläche s umschlossenen Raumes liegen, und der Punkt o ausserhalb desselben sich befindet; nur muss die Normale N dann nach aussen gekehrt sein. Man wende in diesem Falle die Gleichung (10) auf den Raum an, der nach innen durch die Fäche s, nach aussen durch eine unendlich grosse Kugelfläche begrenzt ist, deren Element dS genannt werden möge. Man erhält dadurch:

$$4\pi\varphi_0(t) = \int ds\,\Omega + \int dS\,\Omega.$$

Nun nehme man an, dass bis zu einem gewissen, endlichen Werthe der Zeit überall Ruhe herrsche, sodass für unendlich grosse, negative Werthe von t überall, also auch an der unendlich grossen Kugel, $\varphi(t)$ und $f(t)$ verschwinden. Wählt man den Punkt o im Endlichen und fasst nur endliche Werthe der Zeit ins Auge, so verschwindet dann Ω für jedes Element dS, weil hier $t - r_0/a$ negativ unendlich ist; man erhält also die Gleichung (10). Die Beschränkung, dass der Punkt o im Endlichen liegen und die Zeit endlich sein soll, ist dabei nur eine scheinbare; welches die Lage des Punktes o und der Werth von t sein möge, man kann den Radius der Kugel so gross wählen, dass die angestellte Betrachtung ihre Gültigkeit behält.

Wendet man die Gleichung (10) auf zwei geschlossene Flächen an, die einen Theil gemeinsam haben und beide den Punkt o, aber nicht die leuchtenden Punkte — oder auch die leuchtenden Punkte, aber nicht den Puukt o — umschliessen, und zieht die Resultate, die man dadurch erhält, voneinander ab, so sieht man, dass das Integral $\int ds\,\Omega$, ausgedehnt über eine geschlossene Fläche, welche weder die leuchtenden Punkte noch den Punkt o umgibt, verschwindet. Es verschwindet auch für eine geschlossene Fläche, welche den Punkt o und die leuchtenden Punkte umgibt, wie man erkennt, wenn man die Gleichung (10) für zwei geschlossene Flächen bildet, die einen gemeinsamen Theil haben, und von denen die eine den Punkt o und nicht die leuchtenden Punkte, die andere die leuchtenden Punkte und nicht den Punkt o umgibt.

Die Anwendung, die von der Gleichung (10) bei dem vorliegenden, am Ende des vorigen Paragraphen bezeichneten

Problem zu machen ist, liegt auf der Hand. Man denke sich in dem homogenen Aether, der den unendlichen Raum erfüllt, einen leuchtenden Punkt 1; auf die Bewegung, die er hervorbringt, beziehe sich die Funktion φ^*. Wird ein fremdartiger Körper in den Raum gebracht, so wird die Bewegung geändert; es werde dadurch φ aus φ^*; es handelt sich darum, φ zu ermitteln für irgend einen Pnnkt o, der ausserhalb des Körpers liegt. Es sei ds ein Element der Oberfläche des Körpers, dS ein Element einer unendlich kleinen Kugelfläche, die um den leuchtenden Punkt beschrieben ist; der Gleichung (10) zufolge ist dann:

$$4\pi\varphi_0 = \int dS\,\Omega + \int ds\,\Omega.$$

Das erste dieser beiden Integrale hat einen leicht angebbaren Werth. Die Aenderung der Bewegung an dem Elemente dS, die durch die Einführung des Körpers hervorgerufen wird, ist (bei Ausschluss eines gewissen, speciellen Falles) nicht unendlich gross, und da die Kugelfläche, der dS angehört, unendlich klein ist, so ist ihr Einfluss auf den Werth des Integrals unendlich klein. Es kann in diesem also φ^* für φ gesetzt werden, wodurch dasselbe nach der Gleichung (10) $= 4\pi\varphi_0^*$ wird, wenn φ_0^* den Werth von φ^* im Punkte o bezeichnet. Man hat daher:

$$(12) \qquad 4\pi\varphi_0 = 4\pi\varphi_0^* + \int ds\,\Omega.$$

Nach dieser Gleichung kann φ_0 allgemein berechnet werden, wenn man φ^* und für die Oberfläche des Körpers die Werthe von φ und $\partial\varphi/\partial N$ kennt.

§ 3. Für die später anzustellenden Betrachtungen ist es nöthig, den Werth zu kennen, den das Integral $\int ds\,\Omega$, ausgedehnt über eine begrenzte Fläche, unter gewissen Bedingungen hat. Dieser Werth soll jetzt abgeleitet werden. Vorausgesetzt soll dabei werden, dass die Wellenlänge unendlich klein ist, dass φ von einem leuchtenden Punkte 1 herrührt, also den in (4) angegebenen Ausdruck hat, dass für keinen endlichen Theil der Fläche s, über die das Integral auszudehnen ist, oder ihrer Grenze $r_1 + r_0$ constant, oder bis auf unendlich Kleines constant ist, und endlich, dass die gerade Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 nicht durch die Grenze

der Fläche oder unendlich nahe an ihr vorbei geht. Es wird bewiesen werden, dass dann das genannte Ingetral verschwindet, falls die gerade Verbindungslinie von 1 und 0 die Fläche s nicht schneidet. Die Rechnung wird ergeben, dass, wenn ein solcher Schnitt stattfindet, das Integral $= \pm 4\pi\varphi_0$ ist, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Normale N in dem Schnittpunkt einen spitzen oder stumpfen Winkel mit der von 1 nach 0 gezogenen Geraden bildet; was, wenn die erste Behauptung bewiesen ist, schon aus der Gleichung (10) folgt.

Man nehme zuerst für φ den in (3) gegebenen Ausdruck an, setze also:

$$\varphi = \frac{1}{r_1}\cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi;$$

dann wird:

$$\frac{\partial}{\partial N}\frac{1}{r_1}\varphi\left(t - \frac{r_0}{a}\right) = -\frac{1}{r_1 r_0^2}\frac{\partial r_0}{\partial N}\cos\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi$$
$$- \frac{2\pi}{r_1 r_0 \lambda}\frac{\partial r_0}{\partial N}\sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi,$$

ferner nach (8):

$$\frac{1}{r_0}f\left(t - \frac{r_0}{a}\right) = -\frac{1}{r_1^2 r_0}\frac{\partial r_1}{\partial N}\cos\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi$$
$$- \frac{2\pi}{r_1 r_0 \lambda}\frac{\partial r_1}{\partial N}\sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi$$

und daher nach (11):

$$(13)\quad \begin{cases} \Omega = \dfrac{1}{r_1 r_0}\left(\dfrac{1}{r_1}\dfrac{\partial r_1}{\partial N} - \dfrac{1}{r_0}\dfrac{\partial r_0}{\partial N}\right)\cos\left(\dfrac{r_1 + r_0}{\lambda} - \dfrac{t}{T}\right)2\pi \\ \quad + \dfrac{2\pi}{r_1 r_0 \lambda}\left(\dfrac{\partial r_1}{\partial N} - \dfrac{\partial r_0}{\partial N}\right)\sin\left(\dfrac{r_1 + r_0}{\lambda} - \dfrac{t}{T}\right)2\pi. \end{cases}$$

Um bei diesem Werthe von Ω das genannte Integral zu finden, gehe man von dem folgenden Satze aus.

Bezeichnet $F(\zeta)$ eine Function von ζ, die stetig ist in dem Intervall, in dem ζ von ζ_0 bis ζ' wächst, und δ eine Constante, so verschwindet das Integral:

$$(14)\qquad \int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{dF}{d\zeta}\sin(k\zeta + \delta)\,d\zeta,$$

wenn k unendlich gross wird.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt aus Betrachtungen, die denen ganz ähnlich sind, welche Dirichlet bei seinen Untersuchungen über die Fourier'sche Reihe in Bezug auf ein ähnliches Integral angestellt hat. Man zerlege das Integral in solche Theile, dass innerhalb eines jeden $dF/d\zeta$ weder sein Vorzeichen wechselt, noch vom Abnehmen ins Zunehmen oder umgekehrt übergeht; von jedem dieser Theile (deren Anzahl als endlich vorausgesetzt wird) beweist man, dass er verschwindet, wenn k ins Unendliche wächst, indem man ihn weiter in Theile zerlegt der Art, dass alle Werthe von ζ, für welche $\sin(k\zeta + \delta) = 0$ ist, als Zwischengrenzen auftreten, und die Ungleichheiten benutzt, die für die absoluten Werthe dieser Theile sich angeben lassen.

Aus diesem Satze ergibt sich leicht der folgende.

Wenn die Function $F(\zeta)$ die Eigenschaft hat, dass ihr erster Differentialquotient in dem Intervall von $\zeta = \zeta_0$ bis $\zeta = \zeta'$ stetig ist, so wird für $k = \infty$:

$$(15) \qquad k\int_{\zeta'}^{\zeta'} \frac{dF}{d\zeta} \sin(k\zeta + \delta)\, d\zeta = -\left[\frac{dF}{d\zeta}\cos(k\zeta + \delta)\right]_{\zeta_0}^{\zeta'}.$$

In der That wird die linke Seite dieser Gleichung durch partielle Integration:

$$= -\left[\frac{dF}{d\zeta}\cos(k\zeta + \delta)\right]_{\zeta_0}^{\zeta'} + \int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{d^2F}{d\zeta^2}\cos(k\zeta + \delta)\, \delta\zeta;$$

das neue hier auftretende Integral ist aber von der Form des Integrals (14), verschwindet also, wenn k ins Unendliche wächst.

Jetzt denke man sich eine stetig gekrümmte, vollständig begrenzte Fläche s, deren Element ds sein soll, nenne r_1 und r_0 die Entfernungen dieses Elementes von zwei festen Punkten 1 und 0, setze:

$$\zeta = r_1 + r_0,$$

bezeichne durch G eine sich stetig ändernde Function des Ortes von ds, durch δ eine Constante, und untersuche den Werth, den das Integral:

(16) $$\int G \sin\,(k\zeta + \delta)\,ds$$

annimmt, wenn k unendlich gross wird.

Zu diesem Zwecke stelle man sich die Flächen vor, deren Gleichung:

$$\zeta = \text{const.}$$

ist, also die Rotationsellipsoide, deren Brennpunkte die Punkte 1 und 0 sind, und die Schnittlinien dieser mit der Fläche s; dann setze man:

(17) $$F(\zeta) = \pm \int G\,ds,$$

wo die Integration über den Theil der Fläche s auszudehnen ist, der zwischen den zwei Schnittlinien liegt, von denen die eine dem variabeln Werthe ζ, die andere einem beliebig gewählten, festen Werthe Z entspricht, und wo das Zeichen $+$ gelten soll, wenn $\zeta > Z$, das Zeichen $-$, wenn $\zeta < Z$ ist. Bei dieser Festsetzung ist, wenn $d\zeta$ positiv gewählt wird:

(18) $$\frac{dF}{d\zeta}\,d\zeta = \int G\,ds,$$

wo die Integration über den Theil der Fläche s auszudehnen ist, der zwischen den beiden Schnittlinien liegt, welche den Werthen ζ und $\zeta + d\zeta$ entsprechen. Ist ζ_0 der kleinste, ζ' der grösste Werth von ζ in der Fläche s, so ist hiernach das Integral (16):

$$= \int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{dF}{d\zeta} \sin\,(k\zeta + \delta)\,d\zeta,$$

also = dem Integral (14); es verschwindet daher für $k = \infty$, falls $F(\zeta)$ in der Fläche s stetig ist, d. h. falls für keinen endlichen Theil der Fläche s ein constanter Werth von ζ stattfindet.

Es werde jetzt bei gleicher Bedeutung der Zeichen der Ausdruck:

(19) $$k \int G \sin\,(k\zeta + \delta)\,ds$$

ins Auge gefasst. Dieser ist:

$$= k \int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{dF}{d\zeta} \sin\,(k\zeta + \delta)\,d\zeta,$$

also gleich dem linken Theile der Gleichung (15). Er ist daher für $k = \infty$ auch gleich dem rechten Theile derselben, falls das durch (18) definirte $dF/d\zeta$ innerhalb der Fläche s stetig ist. Dieser Differentialquotient ist unstetig, sobald ζ für einen endlichen Theil der Grenze von s constant ist; wird dieser Fall ausgeschlossen, so kann eine Unstetigkeit nur eintreten, wenn für einen Punkt der Fläche $d\zeta$ verschwindet. Es wird besonders untersucht werden, was dann stattfindet. Sonst hat die Gleichung (15) Gültigkeit, und aus dieser folgt weiter, dass der Ausdruck (19) verschwindet. Unter den gemachten Voraussetzungen findet nämlich sowohl der grösste als der kleinste Werth von ζ in einem oder einigen Punkten der Grenze von s statt, und für einen jeden solchen Punkt ist das Integral $\int G ds$, das man berechnen muss, um nach (18) das entsprechende $dF/d\zeta$ zu ermitteln, unendlich klein von höherer Ordnung als $d\zeta$; es verschwindet also dieses $dF/d\zeta$.

Nun ist der Werth von (19) für den Fall zu suchen, dass $d\zeta$ für einen Punkt in der Fläche s verschwindet. Es geschehe das für den Punkt (x, y, z), und $g\ (x, y, z) = 0$ sei die Gleichung dieser Fläche; dann ist:

$$\frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial r_0}{\partial x} = L\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial r_1}{dy} + \frac{\partial r_0}{\partial y} = L\frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial r_1}{\partial z} + \frac{\partial r_0}{\partial z} = L\frac{\partial g}{\partial z},$$

wo L einen unbestimmten Factor bedeutet. Bezeichnen α_1, β_1, γ_1, α_0, β_0, γ_0 und α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche die Coordinatenaxen bilden mit der Linie, die von dem Punkte 1 nach dem Punkte (x, y, z) gezogen ist, der Linie, die von dem Punkte 0 nach dem Punkte (x, y, z) gezogen ist, und einer Normale N der Fläche s in diesem Punkte, so lassen diese Gleichungen sich schreiben:

$$(20) \qquad \alpha_1 + \alpha_0 = M\alpha, \quad \beta_1 + \beta_0 = M\beta, \quad \gamma_1 + \gamma_0 = M\gamma,$$

wo M einen neuen Factor bedeutet. Es ergibt sich aus ihnen einmal, dass die Linien r_1 und r_0 und N in einer Ebene liegen; dann folgt auch:

$$M(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1) = M(\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0),$$

und diese Gleichung sagt aus, dass entweder $M = 0$, d. h. $\alpha_0 = -\alpha_1$, $\beta_0 = -\beta_1$, $\gamma_0 = -\gamma_1$ ist, also der Punkt (x, y, z)

zwischen den Punkten 1 und 0, auf ihrer geraden Verbindungslinie liegt, oder die Richtungen $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ und $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ mit der Richtung von N gleiche Winkel bilden. Im zweiten Falle müssen die Linien r_1 und r_0 auf entgegengesetzten Seiten der Normale N liegen, wenn sie nicht mit dieser oder ihrer Verlängerung zusammenfallen; denn durch $\alpha_0 = \alpha_1$, $\beta_0 = \beta_1$, $\gamma_0 = \gamma_1$ werden die Gleichungen (20) nicht erfüllt, es sei denn, dass r_1 und r_0 mit N oder der Verlängerung von N zusammenfallen.

Es werde jetzt die Bedeutung der Zeichen x, y, z geändert und durch (x, y, z) ein variabler Punkt der Fläche s in Bezug auf ein Coordinatensystem bezeichnet, dessen Anfangspunkt der frühere Punkt (x, y, z) und dessen z-Axe die Normale N ist. Es sollen ferner die Dimensionen der Fläche s als unendlich klein (aber als unendlich gross gegen $1/k$) angenommen werden; es ist ausreichend, unter dieser Annahme das Integral (19) zu berechnen, da sein Werth durch Hinzufügung neuer Theile zur Fläche s nach dem, was bewiesen ist, nicht geändert wird. Die Gleichung der Fläche s ist dann:

(21) $$z = a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2,$$

wo a_{11}, a_{12}, a_{22} Constanten sind, und zugleich ist:

$$ds = dx\,dy.$$

Um die Schnittlinien der Fläche s mit den Flächen $\zeta =$ const. zu finden, muss nun der Ausdruck von ζ gebildet und nach Potenzen von x und y entwickelt werden. Es seien x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Punktes 0 und:

$$\varrho_0 = \sqrt{x_0^2 + g_0^2 + z_0^2};$$

dann ist:

$$r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

oder:

$$r_0 = \sqrt{\varrho_0^2 - 2xx_0 - 2yy_0 - 2zz_0 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Bezeichnet man x und y als unendlich klein von der ersten Ordnung und entwickelt r_0 bei Benutzung von (21) bis auf Grössen der zweiten Ordnung inclusive, so ergibt sich:

$$r_0 = \varrho_0 - \frac{xx_0 + yy_0}{\varrho_0} - \frac{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2}{\varrho_0} z_0 + \frac{x^2 + y^2}{2\varrho_0} - \frac{(xx_0 + yy_0)^2}{2\varrho_0^3},$$

oder, da die in (20) vorkommenden Grössen α_0, β_0, γ_0 den Gleichungen:

$$\frac{x_0}{\varrho_0} = -\alpha_0, \quad \frac{y_0}{\varrho_0} = -\beta_0, \quad \frac{z_0}{\varrho_0} = -\gamma_0$$

genügen,

$$r_0 = \varrho_0 + \alpha_0 x + \beta_0 y + (a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2) \gamma_0 + \frac{1}{2\varrho_0}\Big(x^2(1-\alpha_0^2) - 2xy\alpha_0\beta_0 + y^2(1-\beta_0^2)\Big).$$

Setzt man entsprechend:

$$\varrho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

so findet man ebenso:

$$r_1 = \varrho_1 + \alpha_1 x + \beta_1 y + (a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2) \gamma_1 + \frac{1}{2\varrho_1}\Big(x^2(1-\alpha_1^2) - 2xy\alpha_1\beta_1 + y^2(1-\beta_1^2)\Big).$$

Bei dem gewählten Coordinatensystem ist aber $\alpha = 0$ und $\beta = 0$, und daher nach (20):

$$\alpha_1 + \alpha_0 = 0, \quad \beta_1 + \beta_0 = 0.$$

Man hat daher:

$$\zeta = A_0 + A_{11} x^2 + 2 A_{12} xy + A_{22} y^2, \qquad \text{wo:}$$

$$(22) \qquad \begin{cases} A_0 = \varrho_1 + \varrho_0 \\ A_{11} = a_{11}(\gamma_1 + \gamma_0) + \dfrac{1-\alpha_1^2}{2\varrho_1} + \dfrac{1-\alpha_0^2}{2\varrho_0} \\ A_{12} = a_{12}(\gamma_1 + \gamma_0) - \dfrac{\alpha_1\beta_1}{2\varrho_1} - \dfrac{\alpha_0\beta_0}{2\varrho_0} \\ A_{22} = a_{22}(\gamma_1 + \gamma_0) + \dfrac{1-\beta_1^2}{2\varrho_1} + \dfrac{1-\beta_0^2}{2\varrho_0}. \end{cases}$$

Die Schnittcurven der Flächen $\zeta =$ const. mit der Fläche s sind hiernach ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten ist. Ihre Gleichung, bezogen auf die Hauptaxe, sei:

$$\zeta - A_0 = \mu_1 x^2 + \mu_2 y^2,$$

d. h. es seien μ_1 und μ_2 die (stets reellen) Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(23) \qquad (A_{11} - \mu)(A_{22} - \mu) - A_{12}^2 = 0.$$

Haben μ_1 und μ_2 gleiches Vorzeichen, so sind die Kegelschnitte Ellipsen; A_0 ist das Minimum von ζ, wenn μ_1 und

μ_2 positiv sind, das Maximum, wenn diese beiden Grössen das negative Vorzeichen haben. Im ersten Falle ist die Fläche der Ellipse, die einem Werthe von ζ entspricht:

$$= \frac{\pi(\zeta - A_0)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}}, \quad \text{im zweiten:} \quad = \frac{\pi(A_0 - \zeta)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}},$$

wo die Wurzel positiv zu nehmen ist, wie überhaupt die Wurzel aus einer positiven Grösse hier positiv verstanden werden soll. Nach der Gleichung (17) ist daher, wenn die dort mit Z bezeichnete Grösse $= A_0$ gewählt wird, für Werthe von ζ, bei denen die entsprechenden Ellipsen ganz innerhalb der Fläche s liegen, in beiden Fällen:

$$F(\zeta) = G \frac{\pi(\zeta - A_0)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}},$$

wo G sich auf den Punkt $(x = 0, y = 0)$ bezieht, also:

$$\frac{dF}{d\zeta} = G \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}}.$$

Fällt kein Theil der Grenze von s mit einer der Ellipsen zusammen, so ist $dF/d\zeta$ in dieser Fläche stetig und für den zweiten Grenzwerth, den ζ hier erlangt, $= 0$. Danach ist der Ausdruck (19) für $k = \infty$, wenn μ_1 und μ_2 positiv sind:

(24) $$= G \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \cos(kA_0 + \delta),$$

und, wenn μ_1 und μ_2 negativ sind:

(25) $$= - G \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1 \pi_2}} \cos(kA_0 + \delta).$$

Weniger einfach gestaltet sich die Rechnung, wenn μ_1 und μ_2 entgegengesetzte Vorzeichen haben, die Kegelschnitte also Hyperbeln sind; in welchem Falle $dF/d\zeta$ bei $\zeta = A_0$ unstetig ist. Man wähle hier die Hauptaxen als Coordinatenaxen und gebe der Fläche s eine bestimmte Gestalt, nämlich die eines Rechtecks, dessen Seiten den Hauptaxen parallel sind und die Gleichungen:

$$x = \pm a, \quad y = \pm b$$

haben. Die Ecken sollen auf den Asymptoten liegen, es soll also:

$$a\sqrt{\mu_1} = b\sqrt{-\mu_2} = c$$

sein, wo μ_1 positiv, μ_2 negativ, c positiv ist. Die reelle Hauptaxe der einem Werthe von ζ entsprechenden Hyperbel fällt dann in die x-Axe, wenn $\zeta - A_0$ positiv, in die y-Axe, wenn $\zeta - A_0$ negativ ist. Setzt man wieder die bei der Gleichung (17) definirte Grösse $Z = A_0$, so hat man daher für $\zeta > A_0$:

$$F(\zeta) = G\left\{2ab - \frac{4}{\sqrt{-\mu_2}}\int\limits_{\sqrt{\frac{\zeta - A_0}{\mu_1}}}^{a} \sqrt{\mu_1 x^2 - \zeta + A_0}\, dx\right\},$$

wo G wiederum auf den Punkt $(x = 0,\ y = 0)$ sich bezieht. Daraus folgt:

$$\frac{dF}{d\zeta} = G\,\frac{2}{\sqrt{-\mu_2}}\int\limits_{\sqrt{\frac{\zeta - A_0}{\mu_1}}}^{a} \frac{dx}{\sqrt{\mu_1 x^2 - \zeta + A_0}},$$

oder, da:

$$\int\limits_1^z \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \log(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\frac{dF}{d\zeta} = G\,\frac{2}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}\log\frac{c + \sqrt{c^2 - \zeta + A_0}}{\sqrt{\zeta - A_0}}.$$

Ebenso findet man für $\zeta < A_0$:

$$\frac{dF}{d\zeta} = G\,\frac{2}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}\log\frac{c + \sqrt{c^2 + \zeta - A_0}}{\sqrt{A_0 - \zeta}}.$$

Erwägt man, dass der kleinste Werth von ζ in den Punkten $(x = 0,\ y = \pm b)$ stattfindet, und $= A_0 - c^2$ ist, während der grösste in den Punkten $(x = \pm a,\ y = 0)$ vorkommt und $= A_0 + c^2$ ist, so ergibt sich der Ausdruck (19):

$$= G\,\frac{2}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}\,k\left\{\int\limits_{A_0 - c^2}^{A_0} \log\frac{c + \sqrt{c^2 + \zeta - A_0}}{\sqrt{A_0 - \zeta}}\sin(k\zeta + \delta)\, d\zeta\right.$$

$$\left. + \int\limits_{A_0}^{A_0 + c^2} \log\frac{c + \sqrt{c^2 - \zeta + A_0}}{\sqrt{\zeta - A_0}}\sin(k\zeta + \delta)\, d\zeta\right\}.$$

Setzt man in dem ersten dieser beiden Integrale:

$$A_0 - \zeta = \xi,$$

in dem zweiten: $\zeta - A_0 = \xi$,

so wird derselbe Ausdruck:

$$= G \frac{2}{\sqrt{-\mu_1 \mu_2}} k \int_0^{c^2} \log \frac{c + \sqrt{c^2 - \xi}}{\sqrt{\xi}} (\sin(k\xi + kA_0 + \delta) - \sin(k\xi - kA_0 - \delta))\, d\xi,$$

oder:

$$= G \frac{4}{\sqrt{-\mu_1 \mu_2}} k \sin(kA_0 + \delta) \int_0^{c^2} \log \frac{c + \sqrt{c^2 - \xi}}{\sqrt{\xi}} \cos k\xi\, d\xi.$$

Nun ist aber:

$$k \int_0^{c^2} \log \frac{c + \sqrt{c^2 - \xi}}{\sqrt{\xi}} \cos k\xi\, d\xi$$

$$= \left[\sin k\xi \log \frac{c + \sqrt{c^2 - \xi}}{\sqrt{\xi}} \right]_{\xi = 0}^{\xi = c^2} - \int_0^{c^2} \sin k\xi \frac{d}{d\xi} \log(c + \sqrt{c^2 - \xi})\, d\xi$$

$$+ \tfrac{1}{2} \int_0^{c^2} \frac{\sin k\xi}{\xi} d\xi.$$

Das erste von diesen drei Gliedern ist für jeden Werth von k gleich Null, da der in den Klammern stehende Ausdruck sowohl für $\xi = c^2$, als für $\xi = 0$ verschwindet; das zweite ist von der Form des Ausdrucks (14) und verschwindet daher für $k = \infty$, da $\log(c + \sqrt{c^2 - \xi})$ auch bei $\xi = c^2$ stetig ist, obwohl sein Differentialquotient unendlich wird; das dritte endlich ist für $k = \infty$:

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin u\, du}{u} \text{ d. h. } = \frac{\pi}{4}.$$

Der gesuchte Werth des Ausdrucks (19) ist daher, wenn μ_1 und μ_2 von entgegengesetztem Vorzeichen sind:

(26) $$= G \frac{\pi}{\sqrt{-\mu_1 \mu_2}} \sin(kA_0 + \delta).$$

Bei der weiteren Discussion der Ausdrücke (24), (25)

und (26) ist zu benutzen, dass, da μ_1 und μ_2 die Wurzeln der Gleichung (23) sind:

$$\mu_1 \mu_2 = A_{11} A_{22} - A_{12}^2 \tag{27}$$

ist, wo A_{11}, A_{12}, A_{22} die in (22) angegebenen Werthe haben.

Wie aus den Gleichungen (20) geschlossen ist, beziehen sich die nun durchgeführten Betrachtungen auf zwei Fälle; der erste von diesen ist der, dass die Fläche s von der geraden Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 geschnitten wird, der zweite der, dass es in der Fläche s einen Punkt gibt, der die Eigenschaft hat, dass die von ihm nach den Punkten 1 und 0 gezogenen Linien gleiche Winkel mit der Normale der Fläche s bilden und mit dieser in einer Ebene liegen. Der erste von diesen Fällen soll hier noch weiter untersucht werden. In ihm ist:

$$\alpha_1 + \alpha_0 = 0, \qquad \beta_1 + \beta_0 = 0, \qquad \gamma_1 + \gamma_0 = 0,$$

die Gleichungen (22) geben daher:

$$A_{11} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right)(1 - \alpha_1^2), \qquad A_{12} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right)\alpha_1 \beta_1,$$

$$A_{22} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right)1 - \beta_1^2),$$

und nach (27) ist:

$$\mu_1 \mu_2 = \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right)^2 \gamma_1^2.$$

Die Wurzeln der Gleichung (23), μ_1 und μ_2, sind:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right) \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right)\gamma_1^2,$$

also beide positiv; daher ist der Ausdruck (19) dem Ausdruck (24) gleichzusetzen; er ist also:

$$= \pm\, G\, 2\pi \frac{\varrho_1 \varrho_0}{\varrho_1 + \varrho_0} \frac{1}{\gamma_1} \cos\bigl(k(\varrho_1 + \varrho_0) + \delta\bigr), \tag{28}$$

wo das positive oder negative Zeichen zu wählen ist, je nachdem γ_1 positiv oder negativ ist.

Bei diesen, über den Ausdruck (19) angestellten Betrachtungen ist δ als eine Constante angenommen; sie gelten aber auch, wenn δ, wie G, sich stetig mit dem Orte von ds ändert; dann muss in den Ausdrücken (24), (25), (26) und (28) δ, sowie G, auf den Punkt ($x = 0$, $y = 0$) bezogen werden. Man

sieht das ein, wenn man erwägt, dass das Integral (19) bei variablem δ durch die Formel:

$$\sin(k\zeta + \delta) = \cos\delta \sin k\zeta + \sin\delta \cos k\zeta,$$

in die Summe zweier Integrale von gleicher Form zerlegt werden kann, in denen δ die constanten Werthe 0 und $\frac{1}{2}\pi$ hat.

Mit Hülfe der gewonnenen Resultate ist es nun leicht, die im Eingange dieses Paragraphen in Betreff des Integrals $\int ds\, \Omega$ ausgesprochene Behauptung zu beweisen.

Es habe zunächst Ω den in (13), also φ den in (3) angegebenen Werth; man setze:

$$\frac{2\pi}{\lambda} = k \text{ und } -\frac{t}{T} 2\pi = \delta;$$

man sieht dann, dass der Theil des genannten Integrals, der von dem ersten Gliede von Ω herrührt, verschwindet, und dass auch der Theil desselben, den das zweite Glied von Ω ergibt, gleich Null ist, wenn es nicht in der Fläche s einen Punkt der Art gibt, dass die von ihm nach den Punkten 1 und 0 gezogenen Linien gleiche Winkel mit der Normale der Fläche bilden und mit dieser in einer Ebene liegen, und wenn die Fläche nicht von der Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 geschnitten wird. Ist die erste von diesen beiden Bedingungen nicht erfüllt, so verschwindet das betreffende Integral aber auch; um seinen Werth zu finden, hat man nämlich in dem Ausdruck (24), (25) oder (26) für G den Werth zu setzen, den:

$$\frac{1}{r_1 r_0}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N}\right) \tag{29}$$

in dem bezeichneten Punkte annimmt, und dieser Werth ist gleich Null, da $\partial r_1 / \partial N$ und $\partial r_0 / \partial N$ die Cosinus der Winkel sind, die einander gleich sein sollen. Es verschwindet daher $\int ds\, \Omega$ nur dann nicht, wenn die Fläche s von der Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 geschnitten wird. Der Ausdruck (28) gibt in diesem Falle seinen Werth, wenn man in ihn für G den Werth setzt, den (29) in dem Schnittpunkte hat. Lässt man die Richtung von N, die in (13) vorkommt, mit der Richtung der z-Axe zusammenfallen, auf die γ_1 in (28) sich bezieht, so wird:

$$\frac{\partial r_1}{\partial N} = \gamma_1, \qquad \frac{\partial r_0}{\partial N} = -\gamma_1$$

und daher der Werth von (29):

$$= \frac{2\gamma_1}{\varrho_1 \varrho_0},$$

also: $$\int ds\, \Omega = \pm \frac{4\pi}{\varrho_1 + \varrho_0} \cos\left(\frac{\varrho_1 + \varrho_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi$$

oder: $$= \pm 4\pi \varphi_0,$$

wo die positiven oder negativen Zeichen gelten, je nachdem γ_1 positiv oder negativ ist, d. h. je nachdem die Normale N mit der von 1 nach 0 gezogenen Linie einen spitzen oder einen stumpfen Winkel bildet.

Hiermit ist die in Rede stehende Behauptung für den Fall bewiesen, dass φ den durch die Gleichung (3) angegebenen Werth hat; sie bleibt richtig, wenn man von dieser Gleichung in der dort angegebenen Weise zu der allgemeineren Gleichung (4) übergeht.

§ 4. Um aus der Gleichung (12) Folgerungen ziehen zu können, ist es nöthig, die Werthe von φ und $\partial \varphi / \partial N$ an der Oberfläche des Körpers, den die Gleichung voraussetzt, zu untersuchen.

Fallen in einem durchsichtigen Mittel auf die Ebene, in der dasselbe an ein zweites Mittel grenzt, ebene Lichtwellen, so bilden sich reflectirte und gebrochene ebene Wellen. Dass diese entstehen und die Richtungen haben, die sie erfahrungsmässig besitzen, kann als eine Folge davon angesehen werden, dass zwischen den Verrückungen der Aethertheile an der Grenze in beiden Mitteln und deren Differentialquotienten lineare, homogene Gleichungen mit constanten Coëfficienten bestehen. Es beziehe sich φ_e auf das einfallende Licht, φ_r auf das reflectirte im Punkte (ξ, η, ζ); für das erste Mittel sei $\zeta < 0$, für das zweite $\zeta > 0$ und:

$$\varphi_e = A \cos\left(\frac{l\xi + m\eta + n\zeta}{\lambda} - \frac{t + \alpha}{T}\right) 2\pi,$$

wobei l, m, n die Cosinus der Winkel bedeuten, die die Coordinatenaxen mit der Richtung der Wellennormale des einfallenden Lichtes bilden, in der dieses fortschreitet. Es ist dann:

$$\varphi_r = c\,A\cos\left(\frac{l\xi + m\eta - n\zeta}{\lambda} - \frac{t + \alpha + \gamma}{T}\right)2\pi,$$

wo c und γ Constanten sind, deren Werthe abhängen von der Bedeutung des Zeichens φ, dem Einfallswinkel, dem Polarisationszustande des einfallenden Lichtes und der Natur der beiden Mittel. Für $\zeta = 0$ hat man daher, wenn man die Zeichen $\varphi_e(t)$ und $\varphi_r(t)$ als gleichbedeutend mit φ_e und φ_r gebraucht,

(30) $$\varphi_r(t) = c\varphi_e(t + \gamma)$$

und:

(30) $$\frac{\partial\varphi_r(t)}{\partial\zeta} = -c\frac{\partial\varphi_e(t + \gamma)}{\partial\zeta},$$

von welchen Gleichungen die zweite auch geschrieben werden kann:

(30) $$\frac{\partial\varphi_r(t)}{\partial N} = -c\frac{\partial\varphi_e(t + \gamma)}{\partial N},$$

wenn N, wie früher, die nach dem Inneren des ersten Mittels gekehrte Normale der Grenze bedeutet.

Sind im einfallenden Lichte gleichzeitig Wellen von verschiedenen Richtungen vorhanden, sodass sowohl φ_e als φ_r eine Summe solcher Ausdrücke ist, wie sie eben diesen Zeichen gleichgesetzt sind, so bestehen entsprechende Gleichungen für die einzelnen Glieder dieser Summen.

Diese Sätze können eine Anwendung auf den Fall finden, auf den die Gleichung (12) sich bezieht, wenn man die Wellenlänge λ als unendlich klein voraussetzt und die Krümmung der Oberfläche des gedachten Körpers als nirgends unendlich gross annimmt.

Die Gleichung (12) stellt φ_0 (d. h. den Werth von φ für einen beliebigen Punkt 0 des betrachteten Raumes) als eine Summe von Gliedern dar, die herrühren von dem leuchtenden Punkte 1 und von leuchtenden Punkten, die in der Grenzfläche jenes Raumes liegen. Man nehme den Punkt 0 unendlich nahe an dieser Grenzfläche an, und zwar so nahe, dass sein Abstand von ihr auch gegen λ unendlich klein ist. Die Lichtwellen, die ihn treffen, können dann theils als einfallende, theils als reflectirte oder gebrochene bezeichnet werden, je nachdem sie nach der Grenze hin, oder von ihr fort sich

bewegen. Die leuchtenden Punkte, von denen die ersten herrühren, sind diejenigen, die sich auf der einen, die leuchtenden Punkte, von denen die letzten herrühren, diejenigen, die auf der anderen Seite der unendlichen Ebene sich befinden, die durch den Punkt 0, dem nächsten Element der Grenzfläche parallel gelegt ist. Sind, wie angenommen werden soll, in dem zweiten Mittel einfallende Wellen nicht vorhanden, so existiren in dem ersten nur einfallende und reflectirte; es möge φ_e auf die einfallenden, φ_r auf die reflectirten Wellen, φ auf die ganze Bewegung in dem Punkte, der hier der Punkt 0 genannt ist, sich beziehen, sodass:

$$\varphi = \varphi_e + \varphi_r \text{ und } \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi_e}{\partial N} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial N}$$

ist. Dabei gelten dann die Gleichungen (30), wenn das einfallende Licht nur aus einem Wellensysteme besteht und die entsprechenden, dort angegebenen, wenn mehr einfallende Wellensysteme zu unterscheiden sind.

Ein Fall, der besonders einfach, und für den die Vorstellung leichter ist, als für den allgemeinen, ist der, dass ein schwarzer Körper das zweite Mittel bildet, d. h. ein solcher, der Licht weder reflectirt, noch hindurchlässt. Ein Körper, in dem das Licht dieselbe Fortpflanzungsgeschwindigkeit hat, wie in der durchsichtigen Umgebung und hinreichend stark absorbirt wird, muss, der Erfahrung zufolge, diese Eigenschaft besitzen. In einem solchen Körper, wie in jedem undurchsichtigen, sind einfallende Wellen an seiner Oberfläche nicht vorhanden, wie es oben vorausgesetzt ist; überdies ist die mit c bezeichnete Grösse bei ihm immer gleich Null; die an der Oberfläche des schwarzen Körpers zu erfüllende Bedingung ist daher die, dass:

$$(31) \qquad \varphi_r = 0 \text{ und } \frac{\partial \varphi_r}{\partial N} = 0 \text{ ist.}$$

Wenn der bei der Gleichung (12) gedachte Körper ein schwarzer, und seine Oberfläche überall convex ist, so lassen sich hiernach die Werthe von φ und $\partial \varphi / \partial N$ für die Oberfläche mit Leichtigkeit finden. Denkt man sich eine Ebene, die, einer Tangentialebene parallel und unendlich nahe, bei

dem Körper vorbeigeht, so liegt die ganze Oberfläche auf der einen Seite dieser Ebene, der Art, dass jedes Element ds immer nur einen Beitrag zu φ_r, aber keinen zu φ_e liefern kann. Man stelle sich den Kegel vor, der seine Spitze in dem leuchtenden Punkt 1 hat und die Oberfläche berührt; die Berührungslinie desselben theilt die Oberfläche in zwei Theile, von denen der eine dem leuchtenden Punkte zugewandt, der andere von diesem abgewandt ist; für einen Punkt, der dem ersten Theile unendlich nahe ist, liefert der leuchtende Punkt 1 zu φ_e den Beitrag φ^*, für einen Punkt, der unendlich nahe an dem zweiten liegt, liefert er diesen Beitrag zu φ_r, wo φ^* wieder sich auf die Bewegung bezieht, die stattfinden würde, wenn der schwarze Körper nicht vorhanden wäre. An dem ersten Theile ist daher:

(32) $$\varphi = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial N};$$

an dem zweiten ist:

$$\varphi_e = 0, \quad \frac{\partial \varphi_e}{\partial N} = 0,$$

und hieraus folgt nach (31):

(33) $$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0.$$

Bei einer beliebigen Gestalt des schwarzen Körpers genügt man der Bedingung (31), indem man für diejenigen Punkte der Oberfläche, in denen diese zum ersten mal von Geraden, die vom Punkte 1 ausgehen, getroffen wird, die Gleichungen (32), für alle anderen Punkte der Oberfläche die Gleichungen (33) festsetzt. Unter dieser Annahme folgt nämlich aus einem im § 3 bewiesenen Satze, dass das Integral $\int ds\, \Omega$, ausgedehnt über die ganze Oberfläche, verschwindet, wenn der Punkt 0 unendlich nahe an dem ersten Theile, und dass es $= -4\pi\varphi_0^*$ ist, wenn der Punkt 0 unendlich nahe an dem zweiten Theile der Oberfläche gewählt wird; woraus dann mit Hülfe von (12) die Gleichungen (31) für die ganze Oberfläche sich ergeben.

Aus dem eben angezogenen Satze folgt aber auch weiter, dass, wo auch der Punkt 0 in dem durchsichtigen Mittel angenommen wird, $\varphi_0 = \varphi_0^*$ ist, falls die gerade Verbindungslinie von 1 und 0 die Oberfläche des Körpers nicht trifft, und

$\varphi_0 = 0$, falls diese Linie die Oberfläche zweimal oder öfter schneidet. Da man unter φ irgend eine der Verrückungen u, v, w verstehen kann, so ist hierdurch ausgesprochen, dass in dem ersten der beiden unterschiedenen Fälle die Lichtbewegung im Punkte 0 dieselbe ist, wie wenn der schwarze Körper fehlte, im zweiten aber am Orte von 0 Dunkelheit stattfindet; damit ist gesagt, dass der schwarze Körper einen Schatten wirft, dass das Licht des leuchtenden Punktes sich geradlinig fortpflanzt, in Strahlen, die als unabhängig von einander betrachtet werden können.

§ 5. Der eben benutzte, im Anfange des § 3 ausgesprochene Satz gilt nur unter gewissen, dort angegebenen Voraussetzungen; sind diese nicht erfüllt, so sind auch die hier aus dem Satze gezogenen Folgerungen nicht richtig, es treten dann Beugungserscheinungen auf.

Man denke sich den leuchtenden Punkt 1 von einem schwarzen Schirm, in dem eine Oeffnung sich befindet, rings umgeben. Die Linie, in welcher die Oberfläche des Schirmes von einem Kegel berührt wird, der seine Spitze in dem Punkte 1 hat, heisse der Rand der Oeffnung; er theilt die Oberfläche des Schirmes in einen inneren und einen äusseren Theil. Irgend eine Fläche, die durch den Rand begrenzt ist und mit dem einen, wie mit dem anderen dieser Theile eine geschlossene Fläche bildet, die den leuchtenden Punkt umgiebt, sei die Fläche s. Liegt der Punkt 0 irgendwo ausserhalb dieser geschlossenen Flächen, so ist dann nach der Gleichung (12), nach der in Bezug auf schwarze Körper aufgestellten Hypothese, also den Gleichungen (32), (33), und nach der Gleichung (10):

$$4\pi\varphi_0 = \int ds\, \Omega, \tag{34}$$

wo bei der Bildung von Ω φ^* für φ zu setzen und die Integration über die Fläche s auszudehnen ist. Es können sich Beugungserscheinungen in der Nähe des Punktes 0 zeigen, wenn für einen endlichen Theil der Fläche s oder ihrer Grenze $r_1 + r_0$ bis auf unendlich Kleines constant ist, oder die gerade Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 unendlich nahe an der Grenze der Fläche s vorbeigeht. Bei den Erscheinungen, die

Fresnel in der Axe einer kreisförmigen Oeffnung oder eines kreisförmigen Schirmes beobachtete, während ein leuchtender Punkt auf derselben Axe sich befand, waren r_1 und r_0, also auch $r_1 + r_0$ für alle Punkte der Grenze von s nahe constant; bei den nach Fresnel benannten Beugungserscheinungen, bei den Fransen nämlich, die in der Nähe der Schattengrenze eines Schirmes auftreten, geht die Verbindungslinie von 1 und 0 nahe bei der Grenze von s vorbei; bei den Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen (wenn dieselben ohne Benutzung von Linsen, also auf einer unendlich entfernten Tafel, mit Hülfe eines unendlich entfernten leuchtenden Punktes dargestellt werden) ist $r_1 + r_0$ für die ganze Oeffnung nahe constant.

Um auch für diese Fälle die Intensität des Lichtes im Punkte 0 zu finden, setze man zunächst, der Gleichung (3) entsprechend:

$$\varphi^* = \frac{1}{r_1} \cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi. \tag{35}$$

Es erhält dann Ω den in (13) angegebenen Werth. Die beiden Glieder, aus denen derselbe zusammengesetzt ist, sind, da λ unendlich klein ist, von ungleicher Grössenordnung, es sei denn, dass:

$$\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N}$$

unendlich klein ist, welcher Fall hier nicht in Betracht gezogen zu werden braucht. Die Gleichung (34) gibt daher:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\lambda} \int \frac{ds}{r_1 r_0} \left(\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N}\right) \sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi.$$

Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, werde nun angenommen, dass die Fläche s eine ebene ist, dass ihre Dimensionen gegen r_1 und r_0 so klein sind, dass r_1 und r_0 da, wo sie ausserhalb des Sinuszeichens vorkommen, sowie ihre nach N genommenen Differentialquotienten als constant betrachtet werden können, und endlich, dass die Linien r_0 unendlich kleine Winkel mit den Verlängerungen der Linien r_1 bilden. Man hat dann:

$$\frac{\partial r_0}{\partial N} = -\frac{\partial r_0}{\partial N},$$

und $$\varphi_0 = \frac{1}{\lambda r_1 r_0}\frac{\partial r_1}{\partial N}\int ds \sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi .$$

Man verallgemeinere nun den Ausdruck von φ^* auf dem Wege, auf dem die Gleichung (4) aus der Gleichung (3) abgeleitet ist, sodass man erhält:

(36) $$\varphi^* = \frac{D}{r_1}\cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi + \frac{D'}{r_1}\sin\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi ,$$

wo D und D' von der Richtung des von dem leuchtenden Punkte 1 durch den Punkt (x, y, z) gehenden Strahles abhängen. Dabei wird dann:

$$\varphi_0 = \frac{1}{\lambda r_1 r_0}\frac{\partial r_1}{\partial N}\left\{D\int ds \sin\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi - D'\int ds \cos\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi\right\},$$

wo D und D' dieselbe Bedeutung haben. Jetzt darf man unter φ irgend eine der Verrückungen u, v, w verstehen; thut man das und schreibt A und A', B und B', C und C' für D und D', je nachdem $\varphi = u, v, w$ gesetzt wird, so wird bei der in § 1 definirten Einheit für die Lichtintensität die Intensität des Lichtes in der beugenden Oeffnung:

$$= \frac{1}{2 r_1^2}(A^2 + A'^2 + B^2 + B'^2 + C^2 + C'^2) .$$

Bezeichnet man diese durch J und setzt:

$$c = \int ds \cos\frac{r_1 + r_0}{\lambda} 2\pi , \qquad s = \int ds \sin\frac{r_1 + r_0}{\lambda} 2\pi ,$$

so wird die Intensität im Punkte 0:

$$= J\frac{1}{\lambda^2 r_0^2}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N}\right)^2 (c^2 + s^2),$$

welche Gleichung durch mannigfaltige Messungen als mit der Erfahrung übereinstimmend nachgewiesen ist.[1])

§ 6. Die eben abgeleitete Gleichung setzt wesentlich voraus, dass die Dimensionen der beugenden Oeffnung sehr gross gegen die Wellenlängen sind, und ihre Anwendung auf die Beugungsspectren, bei deren Herstellung oft Gitter benutzt sind, deren Spalten nur eine Breite von wenigen Wellenlängen besassen, ist nicht zu rechtfertigen.[2]) Doch

1) Vgl. Fröhlich, Wied. Ann. **6**. p. 429. 1879.

2) Vgl. Fröhlich, Wied. Ann. **6**. p. 430. 1879 u. **15**. p. 592. 1882.

haben die Messungen, denen wir die Kenntniss der Wellenlängen verdanken, gezeigt, dass diese Anwendung die Orte der Lichtmaxima mit grosser Genauigkeit richtig ergibt. Diese Thatsache findet von den hier zu Grunde gelegten Hypothesen aus ihre Erklärung durch die folgenden Betrachtungen.

Man denke sich das Gitter, über dessen Beschaffenheit eine specielle Voraussetzung nicht gemacht zu werden braucht, das z. B. ein Drahtgitter oder ein Russgitter oder ein Diamantgitter sein kann, in die passende Oeffnung eines ebenen, schwarzen Schirmes, der nach allen Seiten sich in die Unendlichkeit erstreckt, eingefügt. Man verstehe unter ds ein Element der Ebene des Gitters, oder, um präciser zu reden, ein Element einer Ebene, die dem Gitter sehr nahe, auf der Seite desselben liegt, auf der der Punkt 0 sich befindet. Es gilt dann die Gleichung (9), und diese vereinfacht sich, wenn man die Annahme einführt, dass r_0 unendlich gross ist, in:

$$4\pi\varphi_0(t) = -\int \frac{ds}{r_0}\left\{ f\left(t - \frac{r_0}{a}\right) + \frac{1}{a}\frac{\partial r_0}{\partial N}\frac{\partial \varphi\left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{\partial t} \right\}.$$

Die Ebene, deren Element ds genannt ist, sei die xy-Ebene des Coordinatensystems, die x-Axe senkrecht auf den Spalten, der Anfangspunkt der Mittelpunkt des rechteckig angenommenen Gitters; ferner sei ϱ_0 die Länge der vom Anfangspunkt nach dem Punkt 0 gezogenen Linie, und es seien α_0, β_0, γ_0 die Cosinus der Winkel, welche diese mit den Coordinatenaxen bildet. Man hat dann:

$$r_0 = \varrho_0 - \alpha_0 x - \beta_0 y, \quad \frac{\partial r_0}{\partial N} = \gamma_0 \quad \text{und:} \quad ds = dx\,dy.$$

Man hat ferner:

$$\varphi(t) = A \cos\frac{t}{T}2\pi + A' \sin\frac{t}{T}2\pi$$

$$f(t) = \frac{\partial\varphi(t)}{\partial N} = B\cos\frac{t}{T}2\pi + B'\sin\frac{t}{T}2\pi$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t} = \frac{2\pi}{\lambda}A'\cos\frac{t}{T}2\pi - \frac{2\pi}{\lambda}A\sin\frac{t}{T}2\pi,$$

wo A, A', B, B' Function von x und y sind. Substituirt

man diese Ausdrücke in die für φ_0 aufgestellte Gleichung, so erhält man bei passender Verlegung des Anfangspunktes der Zeit:

$$\varphi_0 = \iint dx\,dy \left\{ C\cos\left(\frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x + \beta_0 y}{\lambda}\right)2\pi + C'\sin\left(\frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x + \beta_0 y}{\lambda}\right)2\pi \right\},$$

wo C und C' umgekehrt proportional mit ϱ_0, lineare Functionen von γ_0 und — was hier hervorzuheben ist — lineare homogene Functionen von A, A', B, B' sind, deren Coëfficienten von x und y nicht abhängen. Nun sei die Lichtquelle ein leuchtender Punkt, der auf der negativen z-Axe in der Unendlichkeit liegt, $2b$ die Länge der Spalten, $2n$ ihre Anzahl und e der Abstand entsprechender Punkte zweier aufeinander folgender, also $2ne$ die Breite des Gitters. Man darf dann annehmen, dass A, A', B, B', also C und C' von y so abhängen, dass sie constant bleiben, wenn y von $-b$ bis $+b$ variirt, und verschwinden, wenn y ausserhalb dieses Intervalls liegt; von x aber so, dass sie um e periodisch sind, wenn x einen Werth zwischen $-ne$ und $+ne$ hat, und für andere Werthe von x verschwinden. Infolge hiervon wird zunächst:

$$\varphi_0 = \frac{\sin\frac{\beta_0 b}{\lambda}2\pi}{\frac{\beta_0}{\lambda}\pi} \int_{-ne}^{ne} dx \left\{ C\cos\left(\frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x}{\lambda}\right)2\pi + C'\sin\left(\frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x}{\lambda}\right)2\pi \right\}.$$

Da λ als unendlich klein gegen b angesehen werden kann, so ist der vor dem Integralzeichen stehende Factor für jeden endlichen Werth von β_0 gegen b unendlich klein, während er endlich ist, wenn β_0 von der Ordnung von λ/b ist. Unter dem Integralzeichen denke man sich C und C' nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von $(x/e)2\pi$ entwickelt; es treten dann, wenn h eine ganze Zahl oder Null bedeutet, die Integrale auf:

$$\int_{-ne}^{ne} dx \cos h\frac{x}{e}2\pi \sin\alpha_0\frac{x}{\lambda}2\pi \quad \text{und:} \quad \int_{-ne}^{ne} dx \sin h\frac{x}{e}2\pi \cos\alpha_0\frac{x}{\lambda}2\pi,$$

die verschwinden, und die Integrale:

$$\int_{-ne}^{ne} dx \cos h\frac{x}{e}2\pi \cos\alpha_0\frac{x}{\lambda}2\pi \quad \text{und:} \quad \int_{-ne}^{ne} dx \sin h\frac{x}{e}2\pi \sin\alpha_0\frac{x}{\lambda}2\pi,$$

die resp.:

$$= \frac{\sin ne\,2\pi\left(\frac{h}{e}-\frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}{2\pi\left(\frac{h}{e}-\frac{\alpha_0}{\lambda}\right)} + \frac{\sin ne\,2\pi\left(\frac{h}{e}+\frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}{2\pi\left(\frac{h}{e}+\frac{\alpha_0}{\lambda}\right)} \qquad \text{und:}$$

$$= \frac{\sin ne\,2\pi\left(\frac{h}{e}-\frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}{2\pi\left(\frac{h}{e}-\frac{\alpha_0}{\lambda}\right)} - \frac{\sin ne\,2\pi\left(\frac{h}{e}+\frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}{2\pi\left(\frac{h}{e}+\frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}$$

sind. Diese Ausdrücke sind im allgemeinen gegen ne unendlich klein, wenn λ als unendlich klein gegen ne bezeichnet wird; sie sind aber endlich, falls:

$$\alpha_0 \pm h\frac{\lambda}{e}$$

von der Ordnung λ/ne ist.

Da nun unter φ irgend eine der Verrückungen u, v, w verstanden werden kann, so folgt hieraus, dass für:

$$\alpha_0 = \pm h\frac{\lambda}{e}, \qquad \beta_0 = 0$$

die Lichtintensität unendlich gross ist gegen die in allen anderen Punkten des Gesichtsfeldes stattfindende; und das ist es, was die Beobachtungen gezeigt haben.

§ 7. Nach den gemachten Auseinandersetzungen ist es leicht, auch das Gesetz der Reflexion der Lichtstrahlen abzuleiten. Dem leuchtenden Punkte 1 sei ein beliebiger Körper gegenübergestellt. Um den Fall zu vereinfachen, denke man sich aber die Oberfläche dieses mit einer schwarzen Hülle bedeckt, in der nur eine kleine Oeffnung auf der dem leuchtenden Punkte zugewandten Seite sich befindet; überdies seien die geometrischen Verhältnisse der Art, dass das reflectirte Strahlenbündel, welches erfahrungsmässig sich bildet, die Oberfläche des Körpers nicht zum zweiten mal trifft. Wiederum beziehe sich das Zeichen φ^* auf die Bewegung, die stattfinden würde, wenn der fremde Körper nicht vorhanden wäre, und es sei zunächst φ^* durch die Gleichung (35) bestimmt. Den zu erfüllenden Bedingungen genügt man dann, indem man setzt:

für den freien Theil der Oberfläche:

$$\varphi_e = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi_e}{\partial N} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial N},$$

also nach (30):

$$\varphi_r = \frac{c}{r_1}\cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T}\right)2\pi, \quad \frac{\partial \varphi_r}{\partial N} = -c\frac{\partial}{\partial N}\frac{1}{r_1}\cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T}\right)2\pi,$$

und daher:

$$\varphi = \varphi^* + \frac{c}{r_1}\cos\left(\frac{c}{r_1} - \frac{t+\gamma}{T}\right)2\pi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial N} - c\frac{\partial}{\partial N}\frac{1}{r_1}\cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T}\right)2\pi;$$

für die Punkte des geschwärzten Theiles der Oberfläche, in denen diese zum erstenmal von einer vom leuchtenden Punkte 1 ausgehenden Linie getroffen wird:

$$\varphi = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial N};$$

für alle anderen Punkte der geschwärzten Oberfläche:

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0.$$

Den Gleichungen (12) und (11) zufolge ist dann der Ueberschuss des Werthes von φ_0 über den Werth, den φ_0 haben würde, wenn die ganze Oberfläche des fremden Körpers geschwärzt wäre, die Summe der beiden Integrale:

$$-\frac{1}{4\pi}\int c\frac{ds}{r_1 r_0}\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial r_1}{\partial N} + \frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\right)\cos\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T}\right)2\pi \quad \text{und}$$

(37) $$-\frac{1}{2\lambda}\int c\frac{ds}{r_1 r_0}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N} + \frac{\partial r_0}{\partial N}\right)\sin\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T}\right)2\pi,$$

wo die Integration über den freien Theil der Oberfläche — der die Fläche s heissen möge — auszudehnen ist.[1]) Das erste von diesen beiden Integralen ist, wenn der Punkt 0 in endlichem Abstande von der Oberfläche sich befindet, da λ unendlich klein ist, gegen das zweite zu vernachlässigen, so dass der genannte Unterschied der beiden Werthe von φ_0 durch das Integral (37) dargestellt ist.

Es gilt dieses auch, wenn φ^*, statt durch die Gleichung (35), durch die Gleichung (36) gegeben ist; nur die Werthe

1) Es wird ohne Schwierigkeit sich nachweisen lassen, dass, wenn der Punkt 0 in oder unendlich nahe an der Oberfläche liegt, dieser Ausdruck zu den Werthen von φ und $\partial\varphi/\partial N$ zurückführt, die angenommen sind. Doch soll dieser Beweis nicht gegeben werden.

von c und γ sind dann andere. Das Integral (37) ist von der Form des Integrals (19); aus den in Bezug auf dieses angestellten Betrachtungen folgt, dass jenes im allgemeinen verschwindet. (19) verschwindet nicht, wenn die Fläche s von der Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 geschnitten wird. (37) verschwindet aber auch dann, weil dann für den Schnittpunkt:

$$\frac{\partial r_1}{\partial N} + \frac{\partial r_0}{\partial N} = 0$$

ist. Es ist das Integral (37) von Null verschieden, wenn es in der Fläche s einen Punkt gibt, dessen Verbindungslinien mit den Punkten 1 und 0 gleiche Winkel mit der Normale der Fläche s bilden und mit dieser in einer Ebene liegen. Dadurch ist ausgesprochen, dass reflectirte Strahlen existiren, und welche Richtungen diese haben. Eine Störung durch Beugungserscheinungen tritt ein, wenn für einen endlichen Theil der Fläche s oder ihrer Grenze $r_1 + r_0$ bis auf unendlich Kleines constant ist, oder der Punkt 0 unendlich nahe an der Grenze des reflectirten Strahlenbündels liegt.

Aus dem eben abgeleiteten Gesetze, welches die Richtungen der reflectirten Strahlen bestimmt, lassen sich die geometrischen Eigenschaften eines Strahlenbündels, das von einem leuchtenden Punkte ausgegangen und an einer krummen Fläche reflectirt ist, entwickeln. Die im § 3 durchgeführten Rechnungen erlauben aber auch anzugeben, wie auf einem Strahle eines solchen Bündels die Intensität und die Phase von einem Punkte zum anderen variirt.

Der Theil von φ_0, der dem reflectirten Lichte entspricht, d. h. der Ausdruck (37), ist durch die Ausdrücke (24), (25) oder (26) gegeben, wenn darin:

$$G = \frac{K}{\varrho_0}$$

gesetzt wird, wo K eine von ϱ_0 unabhängige Grösse bedeutet. Daraus folgt, dass auf einem reflectirten Strahle die Intensität mit ϱ_0 so sich ändert, dass sie mit dem absoluten Werthe von:

$$\varrho_0{}^2 \mu_1 \mu_2$$

umgekehrt proportional ist. Nach (27) und (22) lässt dieser Ausdruck sich schreiben:

$$(b_{11}\varrho_0+c_{11})(b_{22}\varrho+c_{22})-(b_{12}\varrho_0+c_{12})^2,$$

wo die Grössen b und c von ϱ_0 unabhängig sind, und:

$$c_{11}=\tfrac{1}{2}(1-\alpha_0^2),\quad c_{12}=-\tfrac{1}{2}\alpha_0\beta_0,\quad c_{22}=\tfrac{1}{2}(1-\beta_0^2)$$

ist. Sind $\varrho_0=f_1$ und $\varrho_0=f_2$ die (stets reellen) Wurzeln der quadratischen Gleichung, die man erhält, indem man diesen Ausdruck gleich Null setzt, so ist also die Intensität auch umgekehrt proportional mit dem absoluten Werthe von:

$$(\varrho_0-f_1)(\varrho_0-f_2).$$

In den Punkten $\varrho_0=f_1$ und $\varrho_0=f_2$ ist die Intensität unendlich; es sind das die Brennpunkte des Strahles.

In Betreff der Phase ist zu bemerken, dass diese, wie die Ausdrücke (24), (25), (26) zeigen, sich sprungweise um $\frac{1}{2}\pi$ ändert, wenn der Punkt 0 durch einen der Brennpunkte hindurchgeht.

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass ganz ähnliche Betrachtungen, wie über die Reflexion, auch über die Brechung der Lichtstrahlen angestellt werden können.

---

4. Ueber die electrischen Strömungen in einem Kreiscylinder; von G. Kirchhoff.

Sitzber. d. Berl. Acad. vom 26. April 1883, p. 519.

Am 2. Juli 1880 habe ich der Akademie eine Methode zur Bestimmung der elektrischen Leitungsfähigkeit eines Körpers vorgelegt, der die Gestalt eines Stabes von quadratischem Querschnitt hat. Bei dieser Methode sind die Ecken, welche eine lange Kante begrenzen, mit den Polen einer Kette und die Ecken, die einer zweiten langen Kante angehören, mit den Enden des einen Gewindes eines Differentialgalvanometers zu verbinden. Jene Punkte wurden 1 und 4, diese 2 und 3 genannt. Es wurde einerseits gezeigt, wie experimentell der Widerstand ϱ bestimmt werden kann, der $= P_2 - P_3$ ist, wenn P_2 und P_3 die Werthe bezeichnen, die das Potential in den Punkten 2 und 3 hat, wenn ein Strom von der Intensität 1 dem Stabe in den Punkten 1 und 4 zu- und abgeleitet wird. Andererseits ergab die Theorie, dass

$$\varrho = \frac{l - a \, . \, 0{,}7272}{a^2 k}$$

ist, wenn l die Länge des Stabes, a die Seite seines Querschnitts und k seine Leitungsfähigkeit bedeutet; eine Gleichung, aus der k berechnet werden kann, wenn ϱ, l und a gemessen sind.

Eine ähnliche Methode ist offenbar anwendbar, wenn der zu untersuchende Körper ein Cylinder von kreisförmigem Querschnitt ist. Für den Versuch und für die Rechnung wird es dann am bequemsten sein, die Elektroden 1 und 4 in die Mittelpunkte der Grundflächen und die Punkte 2 und 3 in die Ränder derselben zu legen. Gemessen kann der Widerstand ϱ, d. h. die Differenz $P_2 - P_3$, hier gerade so werden, wie in dem Fall des quadratischen Querschnitts; neu zu berechnen ist aber der Ausdruck, der ϱ als Function der Dimensionen des Cylinders darstellt.

Mit der Theorie der Stromverbreitung in einem durch zwei senkrechte Querschnitte begrenzten, kreisförmigen Cylinder haben sich Riemann und Hr. H. Weber beschäftigt. Jener[1]) stellt für den Fall, dass die Elektroden die Mittelpunkte der Endflächen sind, das Potential, φ, durch eine Reihe dar, die nach den Sinus der Vielfachen, der der Cylinderaxe parallelen Ordinate, z, des betrachteten Punktes fortschreitet. Eine Reihe derselben Art leitet Hr. Weber[2]) für den Fall ab, dass die Elektroden zwei Punkte der Mantelfläche sind. Diese Reihen sind zur numerischen Rechnung sehr geeignet, wenn die Länge des Cylinders klein gegen seinen Radius ist, nicht aber in dem entgegengesetzten Falle, der hier gerade in Betracht kommt. Eine Reihe, die dann im Allgemeinen brauchbar ist, findet Hr. Weber in einer zweiten Abhandlung[3]) durch Umformung seiner ursprünglichen Reihe; es treten dabei Exponentialfunctionen an die Stelle der trigonometrischen Functionen von z. Die Annahme, dass die Elektroden die Mittelpunkte der Endflächen sind, hat Hr. Weber nicht ver-

1) Zur Theorie d. Nobili'schen Farbenringe; Pogg. Ann. Bd. 95. 1855.

2) Ueber die Bessel'schen Functionen und ihre Anwendung auf die Theorie der elektrischen Ströme; Borchardt's Journal Bd. 75. 1872.

3) Ueber die stationären Strömungen der Elektricität in Cylindern; Borchardt's Journal Bd. 75.

folgt; die Werthe, die dann das Potential in Punkten der Mantelfläche hat, kann man aber nach einem gewissen Reciprocitätssatze finden, indem man den Weber'schen Ausdruck auf die Mittelpunkte der Endflächen anwendet. Die Lösung der Aufgabe, um die es sich hier handelt, gibt indessen die Reihe, auf die man so kommt, unmittelbar nicht, da sie zu langsam convergirt, wenn der Punkt, für den sie gilt, im Rande einer Grundfläche liegt. Sie muss also noch einer Umformung unterworfen werden.

Es seien z, r und w die Cylindercoordinaten des Punktes, auf den das Potential φ sich bezieht; es sei dieses von w unabhängig; dann ist:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Wird der Radius des leitenden Cylinders $= 1$ gesetzt, so ist

$$\text{für } r = 1 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0.$$

Weiter werde angenommen, dass φ entgegengesetzte Werthe besitzt für entgegengesetzte Werthe von z.

Nennt man $J_0(\lambda)$ und $J_1(\lambda)$ die Bessel'schen Functionen 0ter und erster Ordnung von λ, d. h. setzt man:

$$J_0(\lambda) = 1 - \frac{\lambda^2}{2^2} + \frac{\lambda^4}{(2\,.\,4)^2} - \frac{\lambda^6}{(2\,.\,4\,.\,6)^2} + \dots$$

und

$$J_1(\lambda) = -\frac{dJ_0(\lambda)}{d\lambda},$$

so genügt man allen diesen Bedingungen durch:

$$\varphi = A_0 z + \sum_1^\infty A_n (e^{\lambda_n z} - e^{-\lambda_n z}) J_0(\lambda_n r),$$

wo A_0, A_1, A_2, ... willkürliche Constanten und λ_1, λ_2, ... die positiven Wurzeln der Gleichung:

$$J_1(\lambda) = 0$$

bezeichnen. Die Constanten A finden ihre Bestimmung, wenn die Werthe von $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ für eine Grundfläche des Cylinders gegeben sind, durch die Sätze, dass:

$$\int_0^1 J_0(\lambda_n r) J_0(\lambda_m r) r\,dr = 0,$$

wenn m und n verschieden sind, dass:

$$\int_0^1 J_0(\lambda_n r) r\,dr = 0$$

und

$$\int_0^1 [J_0(\lambda_n r)]^2 r\,dr = \frac{1}{2}[J_0(\lambda_n)]^2$$

ist. Es folgt hieraus:

$$A_0 = 2\int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} r\,dr$$

$$A_n = \frac{2\int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} J_0(\lambda_n r) r\,dr}{\lambda_n(e^{\lambda_n z} + e^{-\lambda_n z})\big(J_0(\lambda_n)\big)^2},$$

wo für z der der Grundfläche entsprechende Werth zu setzen ist.

Nun sei für die beiden Grundflächen:

$$z = \pm \frac{l}{2}$$

und $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$, ausser da, wo r unendlich klein ist; hier sei es unendlich gross und zwar so, dass

$$\text{für } z = \frac{l}{2} \qquad k 2\pi \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} r\,dr = 1$$

ist; das entspricht der Anordnung, die hier zu untersuchen ist, und es wird dann

$$\varrho = 2\varphi,$$

wenn $z = \frac{l}{2}$, $r = 1$ in φ gesetzt wird. Hiernach hat man

$$k\pi A_0 = 1$$

$$k\pi A_n = \frac{1}{\lambda_n\left(e^{\frac{\lambda_n l}{2}} + e^{-\frac{\lambda_n l}{2}}\right)\big(J_0(\lambda_n)\big)^2},$$

und daher:

$$k\pi\varrho = l + 2\sum_1^\infty \frac{1 - e^{-\lambda_n l}}{1 + e^{-\lambda_n l}} \cdot \frac{1}{\lambda_n J_0(\lambda_n)}.$$

Da schon λ_1 etwa 3,8 ist, so wird, wenn die Länge des Cylinders auch nur ein mässiges Vielfaches seines Radius ausmacht, der erste Factor unter dem Summenzeichen = 1, also:

$$k\pi\varrho = l + 2\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n J_0(\lambda_n)}$$

gesetzt werden dürfen.

Um die hier vorkommende Summe berechnen zu können, muss man den Ausdruck unter dem Summenzeichen umformen. Hr. Stokes[1]) hat für λ_n den Ausdruck angegeben:

$$\frac{\lambda_n}{\pi} = n + 0{,}25 - \frac{0{,}151982}{4n+1} + \frac{0{,}015399}{(4n+1)^3} - \frac{0{,}245835}{(4n+1)^5}\cdot\cdot$$

Mit Hülfe dieser Gleichung und der Gleichung:

$$J_0(\lambda_n) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_n}}\cos\left(\lambda_n - \frac{\pi}{4}\right)\left\{1 - \frac{1.9}{1.2.(8\lambda_n)^2} + \cdot\cdot\right\}$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_n}}\sin\left(\lambda_n - \frac{\pi}{4}\right)\left\{\frac{1}{1.8\lambda_n} - \frac{1.9.25}{1.2.3.(8\lambda_n)^3} + \cdot\cdot\right\}$$

findet man durch Entwickelung nach absteigenden Potenzen von $4n+1$

$$\frac{1}{\lambda_n J_0(\lambda_n)} = (-1)^n\sqrt{\frac{2}{4n+1}}\left\{1 + \frac{0{,}607928}{(4n+1)^2} + \frac{0{,}06160}{(4n+1)^4} + \frac{3{,}20586}{(4n+1)^6}\cdot\cdot\right\}.$$

Die Genauigkeit dieser Gleichung kann man aus der folgenden Zusammenstellung beurtheilen, in der in der Columne 1 die aus ihr berechneten Werthe von $\frac{1}{\lambda_n J_0(\lambda_n)}$ für $n = 1$, 2 und 3 angegeben sind, während die Columne 2 die entsprechenden Werthe, wie sie aus den Hansen'schen Tafeln für die Bessel'schen Functionen sich ergeben, enthält.

n	1	2
1	− 0,648027	− 0,647980
2	0,474950	0,474950
3	− 0,393644	− 0,393644

Nun ist nach der Maclaurin'schen Summenformel:

$$\sum_0^k (z+n)^h = \frac{(z+k)^{h+1} - z^{h+1}}{h+1} + \frac{1}{2}z^h - B_1\frac{h}{1}\cdot\frac{z^{h-1}}{2}$$
$$+ B_2\frac{h.h-1.h-2}{1.2.3}\cdot\frac{z^{h-3}}{4} - B_3\frac{h.h-1.h-2.h-3.h-4}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{z^{h-5}}{6}\cdot\cdot,$$

1) Lord Rayleigh, Theory of Sound, vol. I, p. 273.

wenn h eine negative Grösse, k eine unendlich grosse, ganze Zahl ist und B_1, B_2, . . die Bernoulli'schen Zahlen bedeuten, also:

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42},\ \ldots$$

ist. Hieraus folgt:

$$\sum_0^k \frac{1}{\sqrt{x+n}} = 2\sqrt{k} - 2\sqrt{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{24}\frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{1}{384}\frac{1}{\sqrt{x^7}} + \frac{1}{1024}\frac{1}{\sqrt{x^{11}}} - \ldots$$

$$\sum_0^k \frac{1}{\sqrt{(x+n)^5}} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^5}} + \frac{5}{24}\frac{1}{\sqrt{x^7}} - \frac{7}{128}\frac{1}{\sqrt{x^{11}}} + \ldots$$

$$\sum_0^k \frac{1}{\sqrt{(x+n)^9}} = \frac{2}{7}\frac{1}{\sqrt{x^7}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^9}} + \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{x^{11}}} - \frac{143}{640}\frac{1}{\sqrt{x^{15}}} + \ldots$$

$$\sum_0^k \frac{1}{\sqrt{(x+n)^{13}}} = \frac{2}{11}\frac{1}{\sqrt{x^{11}}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^{13}}} + \frac{13}{24}\frac{1}{\sqrt{x^{15}}} - \frac{221}{384}\frac{1}{\sqrt{x^{19}}} + \ldots$$

Diese Gleichungen erlauben ohne Mühe den Werth von:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n J_0(\lambda_n)}$$

mit einer für das Experiment mehr als ausreichenden Genauigkeit zu berechnen. Sie ergeben denselben:

$$= -0{,}38479.$$

Die Gleichung für den Widerstand ϱ ist daher:

$$k\pi\varrho = l - 0{,}76958.$$

Hierbei ist der Radius des Cylinders als Einheit der Länge angenommen; lässt man diese Einheit unbestimmt und bezeichnet den Radius durch r, so wird daher:

$$\varrho = \frac{l - r\,.\,0{,}76958}{k\pi r^2}.$$

---

5. Ueber die Diffusion von Gasen durch eine poröse Wand; von Gustav Hansemann.

Wied. Ann. Bd. 21 p. 545—562, 1884.

Die Versuche, über welche hier berichtet werden soll, hatten den Zweck, die Theorie der Diffusion von Gasen durch poröse Diaphragmen zu prüfen, welche von Herrn Stefan[1]) entwickelt worden ist. Derselbe behandelt die Theorie der Bewegung von Gasen durch poröse Körper als einen speciellen Fall der in seiner Abhandlung entwickelten, allgemeinen Theorie der Bewegung von Gasgemengen, indem er die poröse Substanz als ein Gas betrachtet, dessen Theilchen unbeweglich sind[2]), und gelangt dadurch für ein einzelnes, durch ein Diaphragma diffundirendes Gas zu denselben Gleichungen, welche früher schon von Hrn. Bunsen[3]) aufgestellt wurden, für zwei verschiedene, gleichzeitig diffundirende Gase dagegen zu wesentlich anderen Resultaten.

Zur Prüfung der Theorie für ein einzelnes Gas, namentlich in Bezug auf die von derselben geforderte Proportionalität zwischen der Diffusionsgeschwindigkeit und der Druckdifferenz auf den beiden Seiten der porösen Wand, sind schon vielfach Versuche gemacht worden; so von Hrn. G. Hüfner[4]), Hrn. Stefan[5]) und insbesondere von Hrn. Bunsen[6]). Dabei hat sich im allgemeinen die Richtigkeit des Proportionalitätsgesetzes innerhalb gewisser Grenzen der Druckdifferenzen ergeben; da indess die bei diesen Versuchen in Anwendung gekommenen Druckdifferenzen nur sehr gering waren, so schien mir eine Prüfung durch Versuche, welche die Anwendung grösserer Druckdifferenzen gestatteten, geboten.[7])

---

1) Stefan, Wien. Ber. **63.** p. 111 u. f. 1871.

2) Siehe auch Maxwell, Phil. Mag. (4) **20.** p. 21. 1860.

3) Bunsen, Gasometrische Methoden 2. Aufl. p. 267 u. f.

4) G. Hüfner, Wied. Ann. **16.** p. 253 u. f. 1882.

5) Stefan, l. c. p. 120.

6) Bunsen, l. c. p. 275.

7) Die älteren Versuche von Graham (Pogg. Ann. **28.** p. 353. 1833), bei denen die Druckdifferenzen bis zu einer Atmosphäre betrugen, be-

Das Bunsen'sche Diffusiometer, welches meistens entweder in seiner ursprünglichen, oder in einer mehr oder weniger modificirten Gestalt benutzt worden ist, besteht bekanntlich aus einer Glasröhre, deren oberer Theil die poröse Substanz enthält, und deren anderes, offenes Ende durch Quecksilber oder durch eine andere Flüssigkeit abgesperrt wird. Während der Diffusion verändert sich das Gasvolumen beständig, der Druck soll aber constant erhalten werden; um dies zu erreichen, wird der Apparat continuirlich so gehoben oder gesenkt, dass die Höhendifferenz der Sperrflüssigkeit aussen und innen, ungeändert bleibt. Die Schwierigkeiten dieser Operation wachsen in starkem Maasse mit der Vergrösserung der Druckdifferenz; ein Uebelstand, welcher der Anwendung grösserer Druckdifferenzen entgegensteht. Diffundiren gleichzeitig zwei verschiedene Gase durch das Diaphragma, so gesellt sich hierzu noch die Ungewissheit darüber, ob das Mischungsverhältniss der Gase auch in jedem Momente in den verschiedenen Theilen der Diffusionsröhre gleich ist, wie es die Theorie voraussetzt. Diese Umstände waren es hauptsächlich, welche mich veranlassten, ein Diffusiometer zu construiren, bei welchem das Gasvolumen constant blieb, während die sich verändernden Drucke gemessen wurden, und in dessen Räume Rührvorrichtungen zum Mischen der Gase angebracht waren.

Das in meiner mechanischen Werkstätte, vom Mechaniker Hrn. Schwarz, in vortrefflicher Ausführung hergestellte Diffusiometer ist auf Fig. 1 in ein Drittel der wirklichen Grösse und, ein Theil davon, in Fig. 2 in natürlicher Grösse abgebildet. Die Fig. 1 zeigt dasselbe theilweise, rechts, in der Vorderansicht, und zum anderen Theile, links, in einem Horizontalquerschnitte durch die Mitte. Zwischen den beiden gleichen und symmetrisch zu einander gelegenen Kammern A' und A'', Fig. 1, liegt der Diffusionshahn h, dessen Durchlassöffnung bis auf zwei kleine, auf den beiden Seiten gelegene Räume, o auf der linken Seite, mit einem in der Oeffnung erhärteten und gut getrockneten Gypsdiaphragma g ausgefüllt

stätigen das Proportionalitätsgesetz nicht; sie waren aber in ihrer ganzen Anordnung nicht besonders geeignet zur Prüfung desselben.

war. Bei geöffnetem Diffusionshahne stehen also die Kammern A' und A'' in Verbindung miteinander durch das poröse Diaphragma; bei dem Drehen des Hahnes um 90° gegen die in der Figur dargestellte Lage wird diese Verbindung aufgehoben und dagegen eine Verbindung durch das Diaphragma hergestellt zwischen den beiden mit den Hähnen *b* und *c* verschliessbaren Röhrenstücken *B* und *C*. Da die übrigen Theile des Apparates auf den beiden Seiten, links und rechts, gleich sind und symmetrisch liegen, so gilt alles, was hier weiter bei der Beschreibung von einer dieser beiden Seiten gesagt wird, in gleicher Weise für die andere.

Die aus der Fig. 1 ersichtliche Rührvorrichtung besteht aus einer vom aufgeschraubten Deckel der Kammer und einem Bügel getragenen, leicht drehbaren Axe mit vier Flügeln und einem Magnetstabe *m*. Diesem gegenüber, an der Aussenseite des Deckels, befindet sich auf einer anderen Axe ein ebensolcher Magnetstab *n*, welcher durch Drehung des Flügelrades *p* rotirt und dadurch die Rührvorrichtung im Inneren der Kammer in Thätigkeit setzt, ohne dass eine Verbindung der beiden Axen, bei der der nöthige luftdichte Verschluss der Kammer kaum zu bewerkstelligen gewesen wäre, besteht. In dem Deckel der Kammer ist ein Glasfensterchen angebracht, durch welches das Functioniren der Rührvorrichtung controlirt werden kann. Das Flügelrad *p* wurde durch ein Wassergebläse bewegt.

Ich will hier gleich bemerken, dass sich bei Diffusionsversuchen mit Wasserstoff und Sauerstoff, welche angestellt wurden, um den Einfluss des Rührens kennen zu lernen, wo daher einmal die Rührvorrichtung in Thätigkeit war und das andere mal nicht, unter sonst möglichst gleichen Umständen keine wesentlichen Unterschiede ergaben.

Jede der beiden Kammern ist mit einem Thermometer *q* versehen. Zur Messung des Druckes in den Kammern diente der in Fig. 2 im Verticaldurchschnitte abgebildete Theil des Apparates. Die Kammer ist unten verschlossen durch die gewellte Stahlblechscheibe *v* mit dem Ansatze *w*. An diesem befindet sich, durch eine Schraube festgeklemmt, das obere Ende eines sehr feinen Stahlbandes *t*, dessen unteres Ende

in ähnlicher Weise verbunden ist mit dem stärkeren und breiteren Stahlbande *u* und dem Spiegel *r*. Das Stahlband *t* ist ein Stück der Unruhfeder, das andere, *u*, ein Stück der Triebfeder einer Taschenuhr. Das federnde, an dem eisernen Träger *D* befestigte Stahlband *u* war so gestellt, dass das andere, *t*, bei den grössten stattfindenden Senkungen der Druckplatte *v* noch gespannt blieb, sodass *u* wie ein in einem Gelenke beweglicher kleiner Hebelarm wirkte.[1]) Die bei Druckveränderungen entstehenden Bewegungen von *v* wurden durch diese Einrichtung in vergrössertem Maassstabe auf den Spiegel *r* übertragen und dann in bekannter Weise an einer sich spiegelnden, in Millimeter getheilten, von dem Spiegel 2,8 m entfernten verticalen Scala mit einem Fernrohre beobachtet. Für jede Kammer war ein Fernrohr und eine Scala aufgestellt, sodass die Drucke in den beiden Kammern von zwei Beobachtern gleichzeitig bestimmt werden konnten.

Es zeigte sich, dass die Regelmässigkeit im Gange des beschriebenen Apparates zum Messen der Drucke durch die kleinen Erschütterungen bei den Bewegungen der Rührvorrichtung befördert wurde, ohne wesentlichen Nachtheil für die

---

1) Die Uebertragung der Bewegung der Druckplatte auf den Spiegel hat bei der Construction des Apparates die grössten Schwierigkeiten gemacht. Bei allen mir bekannten Einrichtungen dieser Art wirkt an irgend einer Stelle der eine Theil des Uebertragungsapparates nur durch lose Berührung auf den nächstfolgenden ein. Die sehr umfangreichen Vorversuche, welche ich mit solchen Einrichtungen anstellte, ergaben, dass die nach stattgefundenen Bewegungen der Druckplatte sich zeigenden Verrückungen der Gleichgewichtslage des Spiegels, d. i. diejenige Lage desselben, bei welcher die Druckplatte auf ihren beiden Seiten unter dem gleichen Drucke steht, weniger durch elastische Nachwirkung und dauernde moleculare Veränderungen, als durch Verschiebungen der sich nur lose berührenden Theile des Apparates entstehen. Hierdurch veranlasst, wurde schliesslich die oben beschriebene Uebertragungseinrichtung angefertigt, bei welcher zwischen Druckplatte und Spiegel keine Discontinuität stattfindet. Sie functionirt ungleich besser, als eine der bekannten Einrichtungen dies bei meinen Versuchen gethan hatte. Bei Ablenkungen aus der Gleichgewichtslage der Druckplatte, welche an der Scala, durch das Fernrohr gesehen, 250 mm betrugen und mehrere Stunden dauerten, trat unmittelbar nach Herstellung der Druckgleichheit auf den beiden Seiten der Platte die ursprüngliche Gleichgewichtslage meist bis auf 0,2 mm, höchstens bis auf 0,3 mm wieder ein.

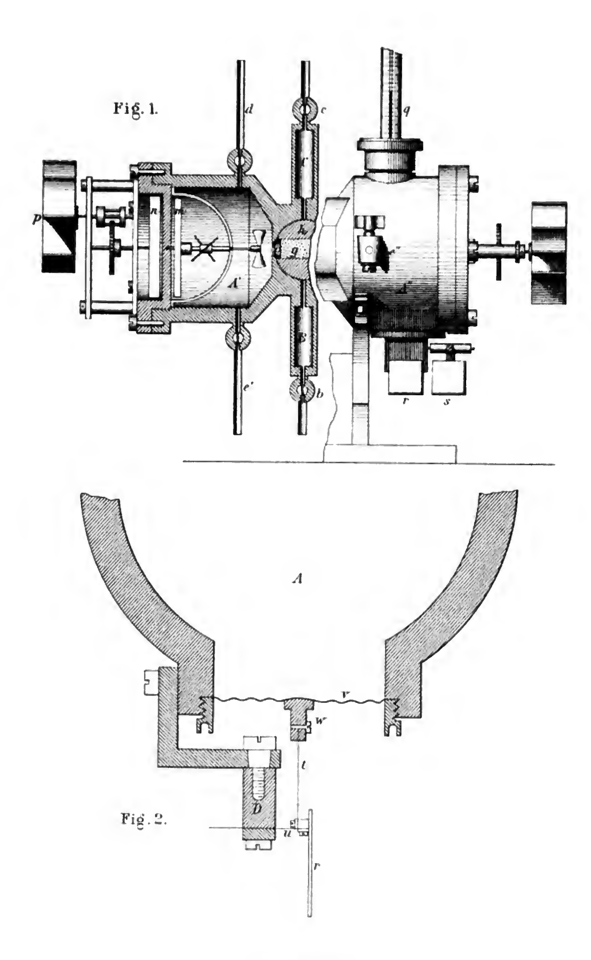
Ablesungen. Infolge hiervon ist bei allen Diffusionsversuchen die Rührvorrichtung in Thätigkeit gesetzt worden, trotzdem dies, nach dem vorhin Gesagten, zur Mischung der Gase nicht durchaus erforderlich war.

Das Diffusiometer wurde in seinen Haupttheilen aus Messing angefertigt und auf einer Gypssäule mit eingegypsten Schrauben befestigt.

Die Röhre *d*, Fig. 1, und die entsprechende der anderen Kammer standen in Verbindung mit einem Quecksilbermanometer, welches zunächst dazu diente, die Reductionsfactoren zur Umrechnung der an den Scalen beobachteten Drucke in Quecksilberdruck zu bestimmen und sodann den Zweck hatte, auf indirectem Wege die direct nicht gut zu messenden Volumen der Kammern zu finden. Zu dem letzteren Zwecke war zwischen dem Diffusiometer und dem Manometer noch ein grösseres Glasgefäss, mit einem Glashahn auf der Seite des Diffusiometers, angebracht und das Volumen zwischen diesem Glashahn und einem Striche der auf den Glasröhren des Manometers befindlichen Theilung mit Quecksilber ausgemessen worden. Zur Bestimmung des Druckes am Manometer diente ein in einer Entfernung von 2,5 m aufgestelltes Kathetometerfernrohr.

Die Röhrenstücke *B* und *C*, sowie die vorderen an den Kammern angebrachten, mit Hähnen versehenen Röhren e' und e'', Fig. 1, standen in Verbindung mit Trocken-, Reinigungs- und Gasentwickelungsapparaten, mit einer Stiefelluftpumpe, einer Quecksilberluftpumpe und einer Druckpumpe, und das System der Röhrenverzweigungen und Hähne war so eingerichtet, dass jede der Kammern A' und A'', sowie das Gypsdiaphragma, einzeln mit diesen Apparaten in Communication gesetzt werden konnten. Die verschiedenen Röhren waren untereinander, soweit die Theile des Apparates vollkommen luftdicht schliessen mussten, mit Guttapercha verbunden.

Mit Hülfe der beschriebenen Einrichtungen war es leicht, die beiden Kammern und das poröse Diaphragma des Diffusiometers mit Gasen unter verschiedenem Drucke zu füllen, durch Drehen des Diffusionshahnes zu einer bestimmten Zeit die Diffusion zwischen den beiden Kammern anfangen zu lassen,



Zu Abhandlung 5.

und die dann sich verändernden Drucke der Zeit nach zu bestimmen, während die Gasvolumina constant blieben.[1])

Was nun die Theorie der hierbei in Frage kommenden Diffusionsvorgänge betrifft, so hat Hr. Kirchhoff[2]), von den Differentialgleichungen des Hrn. Stefan ausgehend, das Integral dieser Gleichungen aufgestellt für den Fall, dass nur ein Gas durch das Diaphragma diffundirt und letzteres im Anfange mit dem gleichen Gase, unter gleichem Drucke gefüllt war, wie eine der beiden Kammern. Sodann hat derselbe, für den Fall zweier Gase, auf Grund der Theorie des Hrn. Stefan, Gleichungen entwickelt, aus denen, mit Hülfe der Diffusionscoëfficienten der beiden Gase gegen das Gypsdiaphragma, der Diffusionscoëfficient für die freie Diffusion der beiden Gase unter einander bestimmt werden kann. Diese Gleichungen sind zur Prüfung der Theorie durch die angestellten Versuche benutzt worden.

Vor den eigentlichen Diffusionsversuchen mussten die in den Gleichungen vorkommenden Constanten des Diffusiometers, sowie die Factoren zur Reduction der Spiegelablenkungen in Quecksilberdruck bestimmt werden. Diese Constanten sind:

V', das Volumen der Kammer A',
V'', „ „ „ „ A'',

beide gemessen durch die Länge einer Röhre, welche das Volumen von A', resp. A'' besitzt, und deren Querschnitt gleich dem Querschnitte des Diaphragmas ist; sodann:

α, der Bruchtheil des Volumens des porösen Körpers, den die Poren einnehmen, und

Δ, die Länge des cylinderförmigen Diaphragmas.

Um die Volumina der Kammern zu finden, war vorher der Rauminhalt des Röhrensystems zwischen dem Diffusiometer und dem an dem Glasgefässe des Quecksilbermanometers befindlichen Glashahn zu bestimmen. Dies geschah,

---

1) Die Veränderung des ungefähr 138 ccm betragenden Volumens einer Kammer durch die Bewegungen der Druckplatte betrug bei den Versuchen nicht über 0,03 ccm und durfte daher vernachlässigt werden.

2) Kirchhoff, Wied. Ann. 21. p. 563. 1884; dies. Nachtrag p. 78.

indem zunächst das Röhrensystem und zugleich der durch den Glashahn damit communicirende, mit Quecksilber ausgemessene Raum des Manometers möglichst luftleer gemacht, hierauf der Glashahn geschlossen und das Röhrensystem mit Luft unter dem Drucke der Atmosphäre gefüllt wurde. Nachdem der Barometer- und Manometerstand, sowie die nöthigen Temperaturen gemessen waren, wurde das Röhrensystem durch die hinteren Hähne des Diffusiometers von diesem abgeschlossen, alsdann der zum Manometer führende Glashahn geöffnet und aufs neue Druck und Temperatur bestimmt. Aus diesen Messungen liess sich in bekannter Weise der Rauminhalt des Röhrensystemes berechnen. Drei Bestimmungen ergaben dafür:

51,209, 51,030, 51,068 ccm,

also im Mittel: 51,102 ccm.

Mit Hülfe dieses Werthes konnten die Volumina der Kammern in derselben Weise gefunden werden. Ich erhielt bei drei Bestimmungen das Volumen der Kammer A':

135,77, 135,88, 135,52, im Mittel: 135,72 ccm

und das der Kammer A'':

139,02, 139,04, 139,12, im Mittel: 139,06 ccm.

Die vorstehenden Messungen waren gemacht bei Temperaturen zwischen 18,5 und 19,5° C., wogegen bei den Diffusionsversuchen die Temperaturen nur 13—14° C. betrugen. Durch eine kleine hierfür angebrachte Correction, und nach Berücksichtigung der bei dem Oeffnen des Diffusionshahnes zu den gemessenen Volumina hinzutretenden kleinen Räume in der Oeffnung dieses Hahnes, *o* Fig. 1 für A', werden die obigen Werthe um 0,10 ccm vergrössert, und es folgen alsdann aus denselben und aus dem Querschnitte des Diaphragmas, welcher 0,6081 qcm beträgt, die Werthe der Constanten:

$$V' = 223{,}35 \text{ cm}, \qquad V'' = 228{,}84 \text{ cm}.$$

Durch directe Messung ergab sich die Constante:

$$\Delta = 2{,}485 \text{ cm},$$

und aus dem in ähnlicher Weise, wie das Volumen der Kammern bestimmten Volumen der Poren des Diaphragmas und den angegebenen Dimensionen desselben die Constante:

$$\alpha = 0{,}46.$$

Die letztere kann keinen Anspruch auf grosse Genauigkeit machen. Bei Anwendung von Sauerstoff ergab sich schon ein um ungefähr acht Procent grösserer Werth, als bei Anwendung von Wasserstoff, was auf eine Mitwirkung von Absorptionserscheinungen schliessen lässt. Indess spielt die Constante α bei der Berechnung der Versuche mit zwei Gasen gar keine, und bei einem einzelnen Gase nur eine so geringe Rolle, dass noch grössere als acht Procent betragende Abweichungen keinen wesentlichen Einfluss auf die Resultate haben.

Die Factoren zur Reduction der Spiegelablenkungen in Quecksilberdruck erhielt ich, indem gleichzeitig jene Ablenkungen für die beiden Kammern und der Druck am Quecksilbermanometer gemessen wurden, während in den Kammern und der mit denselben communicirenden Röhre des Manometers verschiedene Drucke, zwischen 0 und 1000 mm Quecksilberhöhe, hergestellt waren. Aus diesen Messungen ergaben sich alsdann, durch Berechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, die Constanten μ und ν der Gleichung:

$$H = \mu d + \nu d^2,$$

in welcher H die auf 0° C. reducirte Höhe der die Druckdifferenz zwischen dem Gase in den Kammern und der äusseren Atmosphäre messenden Quecksilbersäule, und d die entsprechende Spiegelablenkung bedeutet. Die Messungen wurden bei annähernd der gleichen Temperatur vorgenommen, welche während der Diffusionsversuche bestand. Es ergab sich für die Kammer A', bei negativen Werthen von d:

$$H = 3{,}0947\, d + 0{,}000\,092\,02\, d^2,$$

mit Abweichungen der berechneten von den am Quecksilbermanometer beobachteten Drucken zwischen:

$$-1{,}0 \text{ und } +0{,}6 \text{ mm},$$

und bei positiven Werthen von d:

$$H = 3{,}1173\, d - 0{,}000\,317\,8\, d^2,$$

mit Abweichungen zwischen:

$$-0{,}3 \text{ und } +0{,}2 \text{ mm};$$

sodann für die Kammer A'', bei negativen Werthen von d:

$$H = 2{,}2546\, d + 0{,}000\,000\,202\,0\, d^2,$$

mit Abweichungen zwischen:

$$-0{,}6 \text{ und } +0{,}5 \text{ mm},$$

und bei positiven Werthen von d:

$$H = 2,2564\,d - 0,000\,097\,50\,d^2,$$

mit Abweichungen zwischen:

$$-0,3 \text{ und } +0,2 \text{ mm}.$$

Die vorstehenden Werthe von H dienten dazu, aus den Spiegelablenkungen und dem Barometerstande die Drucke in den Kammern des Diffusiometers zu berechnen.

Es wurden Diffusionsversuche angestellt mit den Gasen, Wasserstoff und Sauerstoff; sie fanden statt in einem Souterainraume meines Laboratoriums, in welchem die Temperatur durch Regulirung einiger Gasflammen leicht innerhalb ziemlich enger Grenzen constant erhalten werden konnte. Sie betrug zwischen 13,4 und 13,8° C.

Der Wasserstoff wurde dargestellt aus käuflichem, sogenanntem chemisch reinen Zink und verdünnter Schwefelsäure unter Zusatz einiger Tropfen Platinchlorid behufs besserer Entwickelung des Gases; der Sauerstoff aus übermangansaurem Kali und Wasserstoffhyperoxyd. Jedes der Gase wurde in Waschflaschen gereinigt und vor dem Einströmen in das Diffusiometer in U-förmig gebogenen, abwechselnd mit wasserfreier Phosphorsäure und dünnen Schichten Glaswolle gefüllten Röhren getrocknet. Vor jedem der beiden Trockenapparate befand sich ein Dreiweghahn von Glas, welcher, je nach seiner Stellung, das aus der Entwickelungsflasche kommende und gereinigte Gas entweder in den Trockenapparat eintreten oder, diesen absperrend, unter Wasser in die Luft entweichen liess. Letzteres geschah stets ein bis zwei Stunden lang, bevor das Gas zum Diffusionsversuche gebraucht wurde. Die schliessliche Füllung eines der Räume des Diffusiometers mit einem der Gase fand alsdann statt, indem der betreffende Raum und alle übrigen nicht durch Hähne auszuschliessenden Räume des Apparates bis zu dem oben erwähnten Dreiweghahn, mit den Luftpumpen dreimal möglichst leer gemacht und wieder mit dem Gase gefüllt wurden.

Ein am Trockenapparat angebrachtes Rohr mit Glaswolle gestattete, durch Oeffnen eines Hahnes, den bei der Füllung einer der Kammern oder des Gypsdiaphragmas mit Gas in diesen Räumen entstandenen Ueberdruck mit der äusseren

Atmosphäre auszugleichen, ohne Gefahr des Eindringens von atmosphärischer Luft in das Diffusiometer.

19. November 1883.

Versuch mit Wasserstoff. Gypsdiaphragma mit Wasserstoff gefüllt. Temperatur in der Kammer A' } unverändert
" " " " A'' } 13,8° C.

Zeit	Auf 0° red. Barometerstand	Spiegelablesungen d. Kammern A'	A''	Spiegelablenkungen d'	d''	Drucke P'	P''	Constante z. Controle	Red. Zeit, in Min. t	$P''-P'$	Diffusionscoëff. k
Ganzer Apparat mit Wasserstoff gefüllt unter dem Druck der Atmosphäre.											
10^h 24′	—	465,3	511,7	—	—	—	—	—	—	—	—
Kammer A'' luftleer gemacht.											
10^h 31′	759,1	465,5	175,3	0,0	−336,4	759,1	0,7	—	—	—	—
32	759,1	Diffusionshahn geöffnet				759,1	1,5	764,5	0	−757,6	—
35	759,1	434,1	218,5	− 31,4	−293,2	662,0	97,9	764,2	3	−564,1	27,54
37	759,1	417,7	240,5	− 47,8	−271,2	611,4	147,6	764,5	5	−463,8	27,53
40	759,0	398,3	266,6	− 67,2	−245,1	551,4	206,3	764,7	8	−345,1	27,60
46	759,0	373,0	300,3	− 92,5	−211,4	473,5	282,4	764,7	14	−191,1	27,65
53	758,9	357,4	321,2	−108,1	−190,5	425,5	329,4	764,9	21	− 96,1	27,63
11^h 1′	758,9	348,7	332,8	−116,8	−178,9	398,5	355,4	764,5	29	− 43,1	27,77
12	758,8	344,1	339,1	−121,4	−172,6	384,4	369,7	765,1	40	− 14,7	27,70
Die Kammern mit der Atmosphäre in Verbindung gesetzt.											
15′	—	465,5	511,7	—	—	—	—	—	—	—	—
										Mittel	27,63

Nachdem die Räume des Diffusiometers in der für den beabsichtigten Versuch geeigneten Weise vorbereitet waren, wurde zu einer bestimmten Zeit der Diffusionshahn geöffnet, und dann, ausser den Thermometer- und Barometerständen, die Spiegelablenkungen, und zwar diese gleichzeitig von zwei Beobachtern, sowie die Zeitpunkte dieser Beobachtungen bestimmt. Um die Beschreibung des Versuches zu vervollständigen, möge das vorstehende Protocoll (p. 554) eines solchen dienen.

Die Barometerstände sind nur zum Theil direct gemessen, die übrigen interpolirt. Die Spiegelablenkungen d' und d'' ergeben sich aus den Spiegelablesungen mit Hülfe derjenigen für die Gleichgewichtslage der Druckplatten, welche im Anfang

und am Ende des Versuches notirt sind. Die Drucke P' und P'' folgen aus den durch die vorhin aufgestellten Reductionsformeln sich ergebenden Werthen von H und den Barometerständen. Die Constante, welche zur Controle des luftdichten Verschlusses während des Versuches dient, folgt aus der dabei stattfindenden Constanz der Summe aller in den Räumen des Diffusiometers enthaltenen Gasmengen. Sie ist in dem obigen Falle für die Zeit Null:

$$P_0' + \frac{V''}{V'} P_0'' + \frac{v}{V'} P_0',$$

und für die übrigen Zeiten:

$$P' + \frac{V''}{V'} P'' + \frac{v}{V'} \frac{P' + P''}{2},$$

wo v das Volumen der Poren des Diaphragmas bedeutet. Die kleinen Abweichungen untereinander, welche diese Werthe zeigen, überschreiten nicht die Fehlergrenzen bei der Reduction der Spiegelablenkungen.

Die Werthe von P' und P'' für die Zeit Null, also P_0' und P_0'' ergeben sich aus den unmittelbar vorher gemachten Messungen. Für diejenige Kammer, welche das Gas unter dem gleichen Drucke enthält, wie das Gypsdiaphragma und der kleine Raum des Diffusionshahnes, o Fig. 1, findet im Augenblicke des Oeffnens dieses Hahnes keine Druckänderung statt; in die leergepumpte Kammer strömt dagegen sofort das Gas aus dem entsprechenden kleinen Raume ein und erzeugt dadurch eine Druckerhöhung, welche noch nicht von der Diffusion herrührt. Sie beträgt in dem obigen Falle 0,8 mm.

Die letzte Columne enthält die aus den verschiedenen Druckdifferenzen $P'' - P'$ und entsprechenden Zeiten t sich ergebenden Werthe des Diffusionscoëfficienten k. Sie sind berechnet mit Hülfe der Gleichung:

$$k = \frac{\log(P_0'' - P_0') - \log(P'' - P') - 0{,}0004}{0{,}001\,545\,t},$$

welche aus der Gleichung (19) des Hrn. Kirchhoff folgt. wenn man darin nur das erste Glied der Summe berücksichtigt.[1]) Es wird dadurch:

1) Das zweite Glied ist schon kleiner wie $1/10^{30}$ des ersten.

$$P' - P'' = 2(P_0' - P_0'') \frac{1}{N\sqrt{\lambda^2 + \beta'^2}} \left(\frac{\beta'}{\sqrt{\lambda^2 + \beta'^2}} + \frac{\beta''}{\sqrt{\lambda^2 + \beta''^2}} \right) e^{-\frac{\lambda^2 a^2}{\Delta^2} t},$$

worin:
$$N = 1 + \frac{\beta'}{\lambda^2 + \beta'^2} + \frac{\beta''}{\lambda^2 + \beta''^2},$$

$$a^2 = \frac{k}{\alpha}; \quad \beta' = \frac{\alpha}{V'} \Delta; \quad \beta'' = \frac{\alpha}{V''} \Delta$$

und $\lambda = 0{,}10063$, die kleinste positive Wurzel der Gleichung:

$$\left(\lambda - \frac{\beta' \beta''}{\lambda}\right) \operatorname{tg} \lambda = \beta' + \beta''$$

ist. Mit Benutzung der schon angeführten Werthe der Constanten V', V'', Δ und α ergibt sich hieraus die obige zur Berechnung von k benutzte Gleichung, in der die Logarithmen Briggische sind.

Die für Druckdifferenzen zwischen 564 und 15 mm gefundenen Werthe von k bei dem mitgetheilten Versuche sind so wenig von einander verschieden, dass dadurch das Gesetz der Proportionalität von Diffusionsgeschwindigkeit und Druckdifferenz bestätigt wird. Das Gleiche zeigte sich bei einem zweiten Versuche mit Wasserstoff. Derselbe wurde so ausgeführt, wie der erste, nur war statt der Kammer A' die andere A'' mit Wasserstoff gefüllt. Ich erhielt aus demselben bei Temperaturen der Kammern zwischen 13,8 und 13,7° C, für die

Zeiten:	3	5	8	14	21	29	40 Min.
und Druckdifferenzen:	561,1	460,0	341,7	187,8	93,4	42,3	13,9 mm
$k =$	27,86	27,88	27,87	27,96	27,99	27,96	28,06

im Mittel $k = 27{,}94$,

also aus beiden Versuchen zusammen im Mittel:

$$k = 27{,}78,$$

welcher Werth bei der Berechnung der späteren Versuche mit Wasserstoff und Sauerstoff als Diffusionscoëfficient des ersteren gegen das Gypsdiaphragma benutzt wurde.

In der Gleichung (19) des Hrn. Kirchhoff ist die anfängliche Gasvertheilung im Gypsdiaphragma berücksichtigt. Um ein Urtheil zu gewinnen über den Einfluss dieses Umstandes auf die Resultate, habe ich aus dem zweiten Ver-

suche mit Wasserstoff die Werthe von k ebenfalls nach der Gleichung (8) des Hrn. Kirchhoff berechnet, bei welcher keine Rücksicht auf das Diaphragma genommen ist. Die Gleichung heisst:

$$P' - P'' = (P_0' - P_0'')\, e^{-\frac{k}{V\Delta}t},$$

wo:

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{V'} + \frac{1}{V''}.$$

Es ergeben sich damit die Werthe:

$k =$	27,92	27,90	27,88	27,94	27,97	27,94	28,05
gegen $k =$	27,86	27,88	27,87	27,96	37,99	27,96	28,06
für die Zeiten:	3	5	8	14	21	29	40 Minten,

also nur sehr geringe Unterschiede.

Aus zwei Versuchen mit Sauerstoff, der erste bei Temperaturen zwischen 13,4 und 13,6° C., der zweite bei der Temperatur von 13,7° C. und ganz analog denjenigen mit Wasserstoff angestellt, folgte für die:

Zeiten:	3	8	16	28	44	64	89	119 Min.
und Druckdifferenzen:	690,1	592,8	463,5	320,9	196,3	106,4	49,6	19,6 mm
$k =$	8,696	8,600	8,622	8,618	8,622	8,618	8,610	8,636

im Mittel $k = 8{,}628$.

und für die:

Zeiten:	3	8	16	28	44	64	89	119 Min.
und Druckdifferenzen:	691,7	594,7	466,3	323,8	198,3	107,6	50,2	19,7 mm
$k =$	8,523	8,504	8,523	8,531	8,561	9,572	8,574	8,622

im Mittel $k = 8{,}551$,

daher aus beiden Versuchen:

im Mittel $k = 8{,}590$

als Diffusionscoëfficient für Sauerstoff. Auch diese Versuche bestätigen das Proportionalitätsgesetz.

Nachdem so die Diffusionscoëfficienten der beiden Gase gegen das Gypsdiaphragma gefunden waren, konnte zu Versuchen geschritten werden, bei denen beide Gase gleichzeitig von den beiden Seiten des Diaphragmas her durch dasselbe diffundirten. Sie fanden in ganz ähnlicher Weise statt, wie die mit den einzelnen Gasen, nur dass dabei beide Kammern mit Gas unter dem Drucke der Atmosphäre gefüllt wurden.

Bei dem ersten dieser Versuche war die Kammer A' mit Wasserstoff, A'' mit Sauerstoff und das Gypsdiaphragma mit Wasserstoff gefüllt. Die Temperatur blieb constant in beiden Kammern 13,7° C. Es ergab sich für die:

Zeiten:	0	1	2	3	4	5	7	9 Min.
der Druck P' :	749,9	744,0	739,4	735,0	730,7	727,0	720,5	714,6 mm
„ „ P'':	749,9	755,3	760,3	765,0	768,9	772,5	779,2	784,6 „
Zeiten:	12	16	22	33	40	46	59	74 Min.
der Druck P' :	707,5	700,7	694,7	690,6	691,2	692,5	697,1	703,2 mm
„ „ P'':	791,4	798,2	804,3	808,5	808,3	807,0	802,6	796,8 „
Zeiten:	104	149	209	269	329	389 Min.		
der Druck P' :	715,0	727,6	738,1	744,1	746,3	748,5 mm		
„ „ P'':	785,3	772,8	763,0	757,5	754,1	752,6 „		

Bei einem zweiten Versuche war die Kammer A' mit Sauerstoff, A'' mit Wasserstoff und das Gypsdiaphragma mit Sauerstoff gefüllt. Die Temperaturen schwankten zwischen 13,6° und 13,8° C. Ich fand für die:

Zeiten:	0	1	2	3	4	5	7 Minuten
den Druck P' :	755,4	760,7	765,4	769,7	773,7	777,8	784,5 mm
„ „ P'':	755,4	750,0	745,5	741,2	737,0	733,2	726,9 „
Zeiten:	9	12	16	21	26	30	34 Minuten
den Druck P' :	790,7	798,2	805,0	810,6	813,7	815,0	815,6 mm
„ „ P'':	721,0	714,3	707,6	702,2	699,1	697,7	697,3 „
Zeiten:	35	36	40	46	60	90	120 Minuten
den Druck P' :	815,6	815,6	815,3	813,7	809,3	796,8	786,4 mm
„ „ P'':	697,3	697,3	697,7	699,1	704,0	715,6	725,9 „
Zeiten:	180	240	300	370 Minuten			
den Druck P' :	772,6	764,7	760,4	758,7 mm			
„ „ P'':	739,0	747,1	751,0	753,4 „			

Zur Berechnung des Diffusionscoëfficienten k für die freie Diffusion der beiden Gase aus diesen Versuchen diente die Gleichung (21) des Hrn. Kirchhoff:

$$ln \frac{(P_2'' v_1 - P_1'' v_2)(v_1 + v_2) + k p_0 v_1 v_2 \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right)}{(P_2' v_1 - P_1' v_2)(v_1 + v_2) + k p_0 v_1 v_2 \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right)} = \frac{v_1 + v_2}{k} \Delta$$

in welcher, für $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi$:

$$P_1' = \Pi - \frac{k_1 k_2}{(k_2 - k_1) V'} \left(\frac{V}{k_2} U + \frac{W}{\Delta} \right);$$
$$P_2' = \frac{k_1 k_2}{(k_2 - k_1) V'} \left(\frac{V}{k_1} U + \frac{W}{\Delta} \right);$$
$$P_1'' = \frac{k_1 k_2}{(k_2 - k_1) V''} \left(\frac{V}{k_2} U + \frac{W}{\Delta} \right);$$
$$P_2'' = \Pi - \frac{k_1 k_2}{(k_2 - k_1) V''} \left(\frac{V}{k_1} U + \frac{W}{\Delta} \right);$$
$$v_1 = \frac{k_1 k_2}{(k_2 - k_1) p_0} \left(\frac{V}{k_2} \frac{dU}{dt} + \frac{U}{\Delta} \right);$$
$$v_2 = - \frac{k_1 k_2}{(k_2 - k_1) p_0} \left(\frac{V}{k_1} \frac{dU}{dt} + \frac{U}{\Delta} \right)$$

ist. Hierin bedeutet:

Π den in beiden Kammern gleichen Druck zur Zeit Null;

$p_0 = 760$ mm den Normalluftdruck;

k_1, k_2 die Diffusionscoëfficienten der Gase in den Kammern A' und A'' gegen das Gypsdiaphragma;

V', V'', V und Δ die schon bei den Versuchen mit den einzelnen Gasen benutzten Constanten;

U die Differenz der Drucke in den Kammern, d. i. $P' - P''$ für irgend eine Zeit t, und

W das bestimmte Integral $\int_0^t U dt$.

U ergibt sich für die Beobachtungszeiten unmittelbar aus den entsprechenden Drucken, für dazwischen liegende Zeiten durch Interpolation, dU/dt mit Hülfe von Interpolationsformeln und W durch mechanische Quadratur.

Für die Zeit Null, wo $U = 0$ und $W = 0$ sind, folgt aus der transcendenten Gleichung zur Berechnung von k die Gleichung (28) des Hrn. Kirchhoff:

$$\frac{1}{p_0 k} V \Delta \frac{dU}{dt} = ln \frac{p_0 k + \Pi k_2}{p_0 k + \Pi k_1},$$

sowie für die Zeit des Maximums von U, die in beiden Versuchen 35 Minuten war, und bei welcher $dU/dt = 0$ ist, die Gleichung (30):

$$\frac{1}{k p_0} \left(\Pi + \frac{V'' - V'}{V'' + V'} \frac{U}{2} \right) U + \frac{W}{V \Delta} + \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) U - \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right) \Pi = 0.$$

Vermittelst der wie vorhin erwähnt zu berechnenden und der schon früher bestimmten Werthe, ergab sich aus den angeführten Gleichungen für:

die Zeiten $t =$	0	3	9	16	35	59	104 Min.
aus d. ersten Vers. $kp_0 =$	3434;	3378;	3153;	3006;	2816;	2725;	2615
„ „ zweiten „ $kp_0 =$	3193;	3200;	3238;	3000;	2807;	2744;	2652
im Mittel $kp_0 =$	3314;	3289;	3196;	3003;	2812;	2734;	2634.

Die grösseren Abweichungen bei den für die ersten Zeiten aus den beiden Versuchen gefundenen Werthe von kp_0 rühren wahrscheinlich von dem Umstande her, dass bei der Entwickelung der Gleichung für k keine Rücksicht auf den Anfangszustand des Gypsdiaphragmas genommen wurde. Das Diaphragma und die kleinen Räume im Diffusionshahn sind einmal ganz mit Wasserstoff und das andere mal ganz mit Sauerstoff gefüllt worden, um so durch Anwendung der beiden extremen Fälle die beiden entgegengesetzten Grenzen des Fehlers jener Vernachlässigung zu erhalten.

In dem obigen Resultate zeigt sich nun zunächst, dass kp_0 keine constante Grösse ist. Die Werthe für dieselbe in den verschiedenen Stadien des Diffusionsversuches weichen viel mehr von einander ab, als dies bei Versuchen über die freie Diffusion von Gasen schon gefunden wurde.[1]) Sodann ist selbst der grösste der obigen Werthe von kp_0 noch immer unvergleichlich kleiner als derjenige, welchen Hr. Loschmidt[2]) für die Gase, Wasserstoff und Sauerstoff, bei nahe der gleichen Temperatur, 13° C., durch directe Versuche erhalten hat. Bei dem von ihm für $p_0 = 744{,}6$ mm gefundenen Werthe:

$$k = 0{,}2966$$

liegen Meter und Stunde als Einheiten zu Grunde. Wird derselbe auf die hier gewählten Einheiten, Centimeter und Minute, reducirt, also mit $100^2/60$ multiplicirt, so folgt:

$$k = 49{,}43 \text{ und } kp_0 = 36786,$$

mithin noch mehr wie zehnmal so gross als der grösste der oben angeführten Werthe.

1) K. Waitz, Wied. Ann. **17.** p. 201. 1882, und A. v. Obermayer, Wien. Ber. **85.** p. 748. 1882. **87.** p. 188. 1883.

2) Loschmidt, Wien. Ber. **61.** p. 376. 1870.

Die Theorie des Hrn. Stefan für die Diffusion zweier Gase durch eine poröse Wand ist hiernach durch meine Versuche nicht bestätigt worden. Sie involvirt die Voraussetzung, dass die freie Diffusion zweier Gase in den sehr kleinen Räumen des porösen Körpers gerade so vor sich gehe, wie in grossen Räumen. Es scheint dies, nach den erhaltenen Resultaten, nicht der Fall zu sein.

Die beiden Diffusionsversuche mit Wasserstoff und Sauerstoff wurden fortgesetzt, der erste bis zur Zeit $t = 389$ Minuten, der zweite bis zur Zeit $t = 370$ Minuten. Durch mechanische Quadratur erhält man, abgesehen vom Vorzeichen:

$$W_{389} = \int_0^{389} U dt = 16480 \text{ für den ersten}$$

und

$$W_{370} = \int_0^{370} U dt = 16390 \text{ für den zweiten Versuch.}$$

Nach Hrn. Kirchhoff ist das zwischen der Zeit t und der Zeit ∞ fehlende, durch Beobachtung nicht zu ermittelnde Stück der Fläche W für grosse Werthe von t annähernd:

$$W_\infty - W_t = \frac{U_t}{\lambda_1},$$

und hierin:

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{V\Delta}{2}\left\{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{\Pi}{kp_0}\right.$$

$$\left. + \sqrt{\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right)^2 + \frac{\Pi^2}{k^2 p_0^2} - 2\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right)\frac{\Pi}{kp_0}\frac{V' - V''}{V' + V''}}\right\}.$$

Mit Hülfe von $kp_0 = 2500$, welchem Werthe sich kp_0 mit wachsender Zeit nähert, folgt aus diesen Gleichungen jenes relativ nur kleine Stück der Fläche für die Versuche:

		I	II
$W_\infty - W_t$	=	440	570

und dann $W_\infty = \int_0^\infty U dt = 16920 \qquad 16960,$

während diese Werthe nach der Theorie, der Gleichung (31) des Hrn. Kirchhoff gemäss:

$$W_\infty = \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right) \Pi V \Delta = 16939 \text{ und } 17063$$

sind.

Die Annahme von $kp_0 = 2500$ in der Gleichung für $1/\lambda_1$ ist eine mehr oder weniger willkürliche; bei einem anderen, wesentlich davon verschiedenen Werthe, z. B. $kp_0 = 2814$ werden die Zahlen für W_∞ um 40, resp. 50 Einheiten verkleinert. Eine weitere Unsicherheit liegt in der Annahme von U_t. Es sind bei der obigen Berechnung die grössten beobachteten, d. h. die letzten Zeiten zu Grunde gelegt worden. Werden statt dessen die vorletzten genommen, so ergibt sich für den ersten Versuch ein um 40 Einheiten grösseres und für den zweiten ein um 74 Einheiten kleineres W_∞. Da diese Differenzen indes relativ klein sind, so wird immerhin eine gute Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und und theoretisch gefundenen Werthen der Fläche W_∞ bestehen bleiben. Hierbei handelt es sich freilich nur um einen speciellen Fall der Theorie, bei dem gerade das charakteristische derselben, der Einfluss von k, dem Coëfficienten der freien Diffusion, verschwindet. Auch die ältere Theorie, welche Hr. Bunsen benutzte, führt zu der Gleichung:

$$W_\infty = \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right) \Pi V \Delta .$$

Bei dieser Theorie ist aber gar keine Rücksicht genommen auf die Widerstände, welche die beiden Gase im Inneren des porösen Körpers bei ihrer Durchdringung einander entgegensetzen, während die hier mitgetheilten Versuche ergeben haben, dass diese Widerstände noch sehr viel grösser sein müssen, als sie die Theorie des Hrn. Stefan voraussetzt.

---

6. Zur Theorie der Diffusion von Gasen durch eine poröse Wand; von G. Kirchhoff.

Wied. Ann. Bd. 21, p. 563—575, 1884.

Hr. Stefan hat in seiner Abhandlung „über das Gleichgewicht und die Bewegung, insbesondere die Diffusion von Gasgemengen“[1]) für die Diffusion zweier Gase durch eine poröse Wand die folgenden Gleichungen aufgestellt:

$$(1) \qquad \begin{cases} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{1}{k}(p_2 v_1 - p_1 v_2) + \frac{a p_0}{k_1} v_1 = 0, \\ \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{1}{k}(p_1 v_2 - p_2 v_1) + \frac{a p_0}{k_2} v_2 = 0, \end{cases}$$

$$(2) \qquad \frac{1}{p_0}\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{1}{p_0}\frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0.$$

Sie beziehen sich auf eine Bewegung der beiden Gase nach der Richtung der x-Axe im Inneren der Wand oder des „Diaphragmas“. p_1 ist der Druck, den die zur Zeit t, an dem durch den Werth von x bestimmten Orte in der Volumeneinheit befindliche Menge des ersten Gases ausüben würde, wenn sie allein in diesem Volumen vorhanden wäre. Ist P_1 der Partialdruck des ersten Gases ausserhalb des Diaphragmas, so ist für die Oberfläche dieses $p_1 = \alpha P_1$; es bezeichnet nämlich α den Bruchtheil des Volumens des porösen Körpers, den die Poren einnehmen, und es ist vorausgesetzt, dass eine Condensation des Gases in diesen nicht stattfindet. v_1 ist das bei dem beliebig zu wählenden Normaldruck p_0 und der Temperatur des Versuches gemessene Volumen der Menge des ersten Gases, welche durch eine auf der Richtung von x senkrechte Flächeneinheit, zur Zeit t, an dem durch x bestimmten Orte, in der Zeiteinheit, nach der Seite, nach der x wächst, hindurchtritt. Die analoge Bedeutung haben p_2 und v_2 für das zweite Gas. k_1 und k_2 sind die Diffusionscoëfficienten des ersten und des zweiten Gases gegen das Diaphragma, k ist der Diffusionscoëfficient der beiden Gase gegeneinander beim Normaldruck k_0.

---

1) Stefan, Wien. Ber. **63.** p. 63. 1871.

Zu diesen partiellen Differentialgleichungen kommen zunächst gewisse Bedingungen hinzu, die sich auf die Oberfläche des Diaphragmas beziehen. Es seien dieses die Ebenen $x = 0$ und $x = \Delta$. Auf jeder Seite befinde sich ein abgeschlossener Raum, eine Kammer, in der die beiden Gase gleichmässig durcheinander gemischt sind. Die Kammer, die an die Fläche $x = 0$ stösst, habe das Volumen V', die andere das Volumen V''; ein jedes von diesen soll gemessen sein durch die Länge einer Röhre, die dasselbe Volumen besitzt, und deren Querschnitt gleich dem Querschnitt des Diaphragmas ist. Bezeichnen dann P_1', P_2', P_1'', P_2'' die Partialdrucke der beiden Gase in den beiden Kammern zur Zeit t, so muss:

$$(3) \quad \begin{cases} \text{für } x = 0: & v_1 = -\dfrac{1}{p_0}\dfrac{d(V'P_1')}{dt}, \quad p_1 = \alpha P_1', \\ & v_2 = -\dfrac{1}{p_0}\dfrac{d(V'P_2')}{dt}, \quad p_2 = \alpha P_2', \\ \text{für } x = \Delta: & v_1 = \dfrac{1}{p_0}\dfrac{d(V''P_1'')}{dt}, \quad p_1 = \alpha P_1'', \\ & v_2 = \dfrac{1}{p_0}\dfrac{d(V''P_2'')}{dt}, \quad p_2 = \alpha P_2'' \end{cases}$$

sein.

Noch setze man:

$$P_1' + P_2' = P', \qquad P_1'' + P_2'' = P'',$$

sodass P' den Gesammtdruck in der ersten, P'' den in der zweiten Kammer bedeutet. Bei den Diffusionsversuchen, welche Bunsen in seinen „Gasometrischen Methoden" beschrieben hat, waren P' und P'' constant; hier ist der Fall ins Auge zu fassen, dass V' und V'' constant sind.

Endlich sind diejenigen Gleichungen zu erfüllen, die ausdrücken, dass die Anfangsvertheilung der Gase eine gegebene sei.

2. Man kommt auf den einfacheren Fall der Diffusion eines Gases durch ein Diaphragma, wenn man $p_2 = 0$ und $v_2 = 0$ setzt. Die Gleichungen (1) und (2) ergeben dann:

$$(4) \qquad \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\alpha p_0}{k_1} v_1 = 0, \qquad \frac{1}{p_0}\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0,$$

und die Gleichungen (3):

$$(5)\quad \begin{cases} \text{für } x = 0: & v_1 = -\dfrac{1}{p_0}\dfrac{d(V'P_1')}{dt}, \quad p_1 = \alpha P_1' \\ \text{für } x = \Delta: & v_1 = \dfrac{1}{p_0}\dfrac{d(V''P_1'')}{dt}, \quad p_1 = \alpha P_1''. \end{cases}$$

Für den Fall, dass P_1' und P_1'', d. h. die Drucke in den beiden Kammern constant erhalten werden, kann man diesen Gleichungen bei der Annahme genügen, dass p_1 und v_1 von der Zeit unabhängig sind, der Vorgang in dem Diaphragma also ein stationärer ist; es muss dann v_1 auch von x unabhängig, also:

$$(6)\qquad p_1 = \text{const.} - \frac{\alpha p_0}{k_1} v_1 x$$

sein. Sogleich nach dem Beginne der Diffusion kann der stationäre Zustand nur eintreten, wenn die Anfangsvertheilung des Gases dieser Gleichung gemäss ist; ist das nicht der Fall, so wird aber der Einfluss der Anfangsvertheilung bei den Verhältnissen, die bei den Versuchen verwirklicht zu sein pflegen, sehr schnell abnehmen, und der Zustand der Strömung von diesem stationären bald nur unmerklich verschieden sein.

Sind nicht die Drucke P_1', P_1'', sondern die Volumina V', V'' constant, so ist, genau genommen, ein stationärer Zustand (ausser dem der Ruhe) nicht möglich; näherungsweise wird man aber in jedem Augenblicke die Strömung im Diaphragma als derjenigen stationären Strömung gleich annehmen dürfen, die stattfinden würde, wenn die Drucke P_1', P_1'' hinreichend lange die Werthe, die sie augenblicklich besitzen, gehabt hätten. Auch für den Fall, dass V' und V'' constant sind, darf man dann aus den Gleichungen (4) die Gleichung (6) folgern, mit deren Hülfe die Gleichungen (5) dann ergeben:

$$\frac{d(P_1' - P_1'')}{dt} = -\frac{k_1}{V\Delta}(P_1' - P_1''),$$

wo:

$$(7)\qquad \frac{1}{V'} + \frac{1}{V''} = \frac{1}{V}$$

gesetzt ist, also:

$$(8)\qquad P_1' - P_1'' = Be^{-\frac{k_1}{V\Delta}t},$$

wo B eine Constante bedeutet, und zwar den Anfangswerth von $P_1' - P_1''$.

Der Fehler dieser Gleichung lässt sich theoretisch beurtheilen, da für den Fall, dass V' und V'' constant sind, sich die genaue Lösung der Gleichungen (4) und (5) finden lässt, bei welcher für $t = 0$ der Druck p_1 einer beliebig gegebenen Function von x gleich wird.

Setzt man:

$$a^2 = \frac{k_1}{\alpha}, \quad b' = \frac{\alpha}{V'}, \quad b'' = \frac{\alpha}{V''}, \tag{9}$$

so gibt die Elimination von v_1 aus den beiden Gleichungen (4):

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} \tag{10}$$

und die Gleichungen (5) geben die Grenzbedingungen:

$$\text{für } x = 0 \quad \frac{\partial p_1}{\partial t} = a^2 b' \frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad \text{für } x = \varDelta \quad \frac{\partial p_1}{\partial t} = -a^2 b'' \frac{\partial p_1}{\partial x}, \tag{11}$$

die sich auch schreiben lassen:

$$\text{für } x = 0 \quad \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = b' \frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad \text{für } x = \varDelta \quad \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = -b'' \frac{\partial p_1}{\partial x}.$$

Diese Gleichungen lassen sich leicht auf diejenigen zurückführen, die ein bekanntes Problem der Wärmeleitung aussprechen. Macht man nämlich:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \vartheta, \tag{12}$$

so werden sie

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2},$$

$$\text{für } x = 0 \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = b' \vartheta, \quad \text{für } x = \varDelta \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -b'' \vartheta,$$

und das sind die Gleichungen, denen die Temperatur ϑ in einem Körper genügen muss, der durch die Ebenen $x = 0$ und $x = \varDelta$ begrenzt ist und in diesen Ebenen, denen eine verschiedene äussere Leitungsfähigkeit zukommt, seine Wärme an eine Umgebung von der Temperatur Null abgibt. Die Gleichungen werden erfüllt durch:

$$\vartheta = \Sigma A_n X_n e^{-\frac{\lambda_n^2 a^2}{\varDelta^2} t}, \tag{13}$$

wo die Summe so zu bilden ist, dass für n alle ganzen Zahlen

von 1 bis ∞ gesetzt werden; A_n eine willkürliche Constante bezeichnet;

(14) $$X_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}} \left(\cos \frac{\lambda_n x}{\varDelta} + \frac{\beta'}{\lambda_n} \sin \frac{\lambda_n x}{\varDelta} \right)$$

ist, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ die ihrer Grösse nach geordneten, positiven Wurzeln der Gleichung

(15) $$\left(\lambda - \frac{\beta' \beta''}{\lambda} \right) \operatorname{tg} \lambda = \beta' + \beta''$$

bedeuten, und

(16) $$\beta' = b' \varDelta, \qquad \beta'' = b'' \varDelta$$

gesetzt ist.

Die Constanten A_n bestimmen sich, wenn ϑ für $t = 0$ als Function von x gegeben ist. Es sei diese Function ϑ_0, so muss die Gleichung:

$$\vartheta_0 = \Sigma A_n X_n$$

erfüllt werden. Es ist aber:

$$\frac{d^2 X_n}{d x^2} = - \frac{\lambda_n^2}{\varDelta^2} X_n$$

und für $x = 0$ $\frac{d X_n}{dx} = \frac{\beta'}{\varDelta} X_n$, für $x = \varDelta$ $\frac{d X_n}{dx} = - \frac{\beta''}{\varDelta} X_n$.

Aus der Differentialgleichung für X_n folgt bei Benutzung des Werthes, den diese Function für $x = 0$ hat:

$$\left(\frac{d X_n}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda_n^2}{\varDelta^2} (X_n)^2 = \frac{1}{\varDelta^2};$$

daraus weiter:

für $x = \varDelta$ $(X_n)^2 = \frac{1}{\lambda_n^2 + \beta''^2}$, während

für $x = 0$ $(X_n)^2 = \frac{1}{\lambda_n^2 + \beta'^2}$

ist. Aus derselben Differentialgleichung folgt ferner:

$$\frac{\lambda_n^2}{\varDelta^2} \int_0^{\varDelta} X_n X_m \, dx = - \left[X_m \frac{d X_n}{dx} \right]_0^{\varDelta} + \int_0^{\varDelta} \frac{d X_n}{dx} \frac{d X_m}{dx} \, dx.$$

Hieraus ist zu schliessen, dass, wenn n und m zwei verschiedene ganze, positive Zahlen sind:

$$\int_0^{\varDelta} X_n X_m \, dx = 0,$$

und dass:

$$\frac{\lambda_n^2}{\Delta^2}\int_0^\Delta (X_n)^2\,dx - \int_0^\Delta \left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2 dx = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\beta'}{\lambda_n^2+\beta'^2} + \frac{\beta''}{\lambda_n^2+\beta''^2}\right)$$

ist, da aber:

$$\frac{\lambda_n^2}{\Delta^2}\int_0^\Delta (X_n)^2\,dx + \int_0^\Delta \left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2 dx = \frac{1}{\Delta}$$

ist, so ergibt sich:

$$2\lambda_n^2\int_0^\Delta (X_n)^2\,dx = \Delta\left(1 + \frac{\beta'}{\lambda_n^2+\beta'^2} + \frac{\beta''}{\lambda_n^2+\beta''^2}\right).$$

Daraus findet man für A_n die Gleichung:

$$(17)\qquad A_n\Delta\left(1 + \frac{\beta'}{\lambda_n^2+\beta'^2} + \frac{\beta''}{\lambda_n^2+\beta''^2}\right) = 2\lambda_n^2\int_0^\Delta \vartheta_0\, X_n\,dx.$$

Damit ist der für ϑ in (13) aufgestellte Ausdruck vollständig bestimmt.

Um nun mit Hülfe von (12) p_1 zu berechnen, wenn dieses für $t = 0$ eine gegebene Function von x ist, hat man zu benutzen, dass nach (14):

$$\int X_n\,dx = \frac{\Delta}{\lambda_n^2}\,\frac{1}{\sqrt{\lambda_n^2+\beta'^2}}\left(\lambda_n \sin\frac{\lambda_n x}{\Delta} - \beta'\cos\frac{\lambda_n x}{\Delta}\right).$$

Daraus folgt:

$$(18)\quad p_1 = A + \sum \frac{A_n\Delta}{\lambda_n^2}\,\frac{1}{\sqrt{\lambda_n^2+\beta'^2}}\left(\lambda_n \sin\frac{\lambda_n x}{\Delta} - \beta'\cos\frac{\lambda_n x}{\Delta}\right) e^{-\frac{\lambda_n^2 a^2}{\Delta^2}t},$$

wo A eine von x unabhängige Grösse bedeutet. Es muss dieselbe auch von t unabhängig sein, da p_1 der partiellen Differentialgleichung (10) genügen soll und dieser durch jedes Glied der in dem Ausdruck von p_1 vorkommenden Summe genügt wird. Für $t = 0$ möge $p_1 = \pi_0$ sein; es ist dann:

$$\vartheta_0 = \frac{\partial \pi_0}{\partial x}$$

zu setzen, und mit diesem Werthe von ϑ_0 sind nach (17) die Coëfficienten A_n zu berechnen. Die Grösse A findet man durch die folgende Ueberlegung. Die Gleichungen (10) und (11) geben, wenn man die erste mit dx multiplicirt, zwischen den

Grenzen 0 und $\varDelta$ integrirt und mit p_1', p_1'' die Werthe von p_1 für diese Grenzen bezeichnet:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_1'}{b'} + \frac{p_1''}{b''} + \int_0^{\varDelta} p_1\, dx\right) = 0,$$

eine Gleichung, die ausspricht, dass die vorhandene Gasmasse mit der Zeit sich nicht ändert. Führt man auch hier die durch (16) definirten Zeichen β' und β'' ein, so hat man also:

$$\frac{p_1'}{\beta'} + \frac{p_1''}{\beta''} + \frac{1}{\varDelta}\int_0^{\varDelta} p_1\, dx = \text{const.}$$

Setzt man die Werthe einander gleich, welche dieser Ausdruck für $t = 0$ und $t = \infty$ annimmt, und beachtet dabei, dass nach (18) für $t = \infty$:

$$p_1' = p_1'' = p_1 = A$$

wird, so erhält man zur Bestimmung von A:

$$A\left(\frac{1}{\beta'} + \frac{1}{\beta''} + 1\right) = \frac{\pi_0'}{\beta'} + \frac{\pi_0''}{\beta''} + \frac{1}{\varDelta}\int_0^{\varDelta} \pi_0\, dx.$$

Von besonderem Interesse für den Versuch ist der Fall, der sehr nahe verwirklicht werden kann, dass π_0 für alle endlichen Werthe von x zwischen 0 und $\varDelta$ den einen Werth π_0'', für $x = 0$ den anderen π_0' hat; für jeden endlichen Werth von x ist dann $\vartheta_0 = 0$, für unendlich kleine Werthe von x wird ϑ_0 unendlich, aber so, dass, wenn ε eine beliebig kleine, positive, endliche Grösse bedeutet:

$$\int_0^{\varepsilon} \vartheta_0\, dx = \pi_0'' - \pi_0'$$

ist. Die Gleichung (17) gibt dann:

$$\frac{A_n \varDelta}{\lambda_n^2}\left(1 + \frac{\beta'}{\lambda_n^2 + \beta'^2} + \frac{\beta'}{\lambda_n^2 + \beta''^2}\right) = 2\,\frac{\pi_0'' - \pi_0'}{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}}.$$

Der hieraus folgende Werth von A_n soll in die Gleichung (18) substituirt und in dieser x einmal $= 0$, dann $= \varDelta$ gesetzt werden. Für den letzteren ist das Quadrat von X_n bereits berechnet, aber das Vorzeichen dieser Grösse ist unbestimmt

geblieben. Mit Hülfe von (15) folgt aus (14), dass für $x = \varDelta$:

$$X_n = \sin \lambda_n \frac{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}}{\lambda_n(\beta' + \beta'')},$$

X_n also von demselben Vorzeichen, wie $\sin \lambda_n$ ist. Aus der Gleichung (15) ersieht man aber, wenn man sie durch $\operatorname{tg} \lambda$ dividirt hat, dass ihre Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ resp. in den Intervallen 0 bis π, π bis 2π, 2π bis 3π, .. liegen, das Vorzeichen von $\sin \lambda_n$ also das von $(-1)^{n+1}$ ist, woraus dann folgt, dass für $x = \varDelta$:

$$X_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta''^2}}$$

und daher:

$$\varDelta \frac{dX_n}{dx} \text{ d. h. } \frac{\beta' \cos \lambda_n - \lambda_n \sin \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}} = (-1)^n \frac{\beta''}{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta''^2}}.$$

Bei Benutzung hiervon erhält man aus (18), wenn man noch durch α dividirt, statt der Drucke p_1', p_1'', die sich auf das Innere des Diaphragmas beziehen, die Drucke P_1', P_1'' einführt, die in den angrenzenden Kammern stattfinden, und der Kürze wegen:

$$1 + \frac{\beta'}{\lambda_n^2 + \beta'^2} + \frac{\beta''}{\lambda_n^2 + \beta''^2} = N$$

setzt:

$$P_1' - \frac{A}{\alpha} = 2(P_0' - P_0'') \sum \frac{1}{N\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}} \frac{\beta'}{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}} e^{-\frac{\lambda_n^2 a^2}{\varDelta^2} t}$$

$$P_1'' - \frac{A}{\alpha} = 2(P_0' - P_0'') \sum (-1)^n \frac{1}{N\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}} \frac{\beta''}{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta''^2}} e^{-\frac{\lambda_n^2 a^2}{\varDelta^2} t}.$$

Hieraus folgt:

$$(19) \quad P_1' - P_1'' = 2(P_0' - P_0'') \sum \frac{\beta}{N\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}} \left(\frac{\beta'}{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}} - (-1)^n \frac{\beta''}{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta''^2}} \right) e^{-\frac{\lambda_n^2 a^2}{\varDelta^2} t}.$$

Es wird dieser Ausdruck identisch mit dem in (8) angegebenen, wenn man β' und β'' als unendlich klein annimmt und nur Endliches berücksichtigt; dann wird nämlich:

$$\lambda_1^2 = \beta' + \beta'',$$

und es reducirt sich die hier auftretende Summe auf ihr erstes Glied.

3. Wenn bei einem gegebenen Apparate der hier gedachten Art β' und β'' so klein, also die Volumina der beiden Kammern gegen das Volumen des Diaphragmas so gross sind, dass bei der Diffusion eines Gases die Gleichung (19) sich nicht bemerkbar von der Gleichung (8) unterscheidet, die aus der Annahme hergeleitet ist, dass in jedem Zeitelement die Strömung im Diaphragma als eine stationäre angesehen werden kann, so wird man berechtigt sein, dieselbe Annahme auch für die Diffusion zweier Gase zu machen. Infolge derselben darf man dann in den Gleichungen (1) und (2) v_1 und v_2 als unabhängig von x betrachten, wodurch die Gleichungen (1) leicht integrabel werden. Indem man sie einmal direct addirt, dann, nachdem sie mit $-v_2$ und v_1 multiplicirt waren, findet man durch Integration:

$$p_1 + p_2 = -\alpha p_0 \left(\frac{v_1}{k_1} + \frac{v_2}{k_2}\right) x + \text{const.}$$

und: $$p_2 v_1 - p_1 v_2 + \frac{\alpha k p_0 v_1 v_2}{v_1 + v_2}\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right) = e^{\frac{v_1 + v_2}{k} x} \text{const.}$$

Hier setze man einmal $x = 0$, dann $x = \Delta$, eliminire die beiden mit const. bezeichneten Grössen und führe statt der Werthe von p_1 und p_2 die in den beiden Kammern stattfindenden Drucke ein. Dadurch erhält man:

$$(20) \qquad P' - P'' = p_0 \left(\frac{v_1}{k_1} + \frac{v_2}{k_2}\right) \Delta,$$

$$(21) \qquad \log \frac{(P_2'' v_1 - P_1'' v_2)(v_1 + v_2) + k p_0 v_1 v_2 \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right)}{(P_2' v_1 - P_1' v_2)(v_1 + v_2) + k p_0 v_1 v_2 \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right)} = \frac{v_1 + v_2}{k} \Delta.$$

Diese zwei Gleichungen in Verbindung mit den Gleichungen (3) bestimmen die sechs Zeitfunctionen P_1', P_1'', P_2', P_2'', v_1, v_2, wenn die Anfangswerthe von P_1', P_1'', P_2', P_2'' gegeben sind. Aus den Gleichungen (3) folgt, wenn man v_1 und v_2 eliminirt und dann integrirt:

$$(22) \qquad V'(P_1' - \Pi_1) + V'' P_1'' = 0, \quad V' P_2' + V''(P_1'' - \Pi_2) = 0,$$

wo Π_1 und Π_2 zwei Constanten und zwar die Drucke bezeichnen, die die beiden Gase ausüben, wenn das erste Gas

ganz in der ersten Kammer, das zweite ganz in der zweiten sich befindet. Aus denselben Gleichungen folgt ferner:

$$v_1 + v_2 = -\frac{V'}{p_0}\frac{dP'}{dt} = \frac{V''}{p_0}\frac{dP''}{dt},$$

also, wenn man wieder das durch (7) definirte Volumen V einführt und:

$$P' - P'' = U \qquad \text{setzt,} \tag{23}$$

$$v_1 + v_2 = -\frac{V}{p_0}\frac{dU}{dt}. \tag{24}$$

Man setze ferner:

$$V'\left(\frac{P_1' - \Pi_1}{k_1} + \frac{P_2'}{k_2}\right) = -\frac{1}{\varDelta} W, \tag{25}$$

woraus nach (22) folgt:

$$V''\left(\frac{P_1''}{k_1} + \frac{P_2'' - \Pi_2}{k_2}\right) = \frac{1}{\varDelta} W.$$

Es wird dann eine einfache Beziehung zwischen den Functionen W und U sich ergeben. In der That ist nach (20):

$$k_0\left(\frac{v_1}{k_1} + \frac{v_2}{k_2}\right) = \frac{1}{\varDelta} U, \tag{26}$$

und daher ergibt die Differentiation von (25) bei Rücksicht auf (3):

$$\frac{dW}{dt} = U.$$

Man kann hiernach P_1', P_1'', P_2', P_2'', v_1, v_2 durch W und seine beiden ersten Differentialquotienten nach t ausdrücken. Behält man das Zeichen U bei, so findet man aus (22), (23) und (25):

$$\left\{\begin{aligned}
\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right)(P_1' - \Pi_1) &= -\frac{1}{V'}\left(\frac{V}{k_2}(U + \Pi_2 - \Pi_1) + \frac{W}{\varDelta}\right) \\
\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right) P_2' &= \frac{1}{V'}\left(\frac{V}{k_1}(U + \Pi_2 - \Pi_1) + \frac{W}{\varDelta}\right) \\
\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right) P_1'' &= \frac{1}{V''}\left(\frac{V}{k_2}(U + \Pi_2 - \Pi_1) + \frac{W}{\varDelta}\right) \\
\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right)(P_2'' - \Pi_2) &= -\frac{1}{V''}\left(\frac{V}{k_1}(U + \Pi_2 - \Pi_1) + \frac{W}{\varDelta}\right)
\end{aligned}\right. \tag{27}$$

und hieraus mit Hülfe von (3), oder aus (24) und (26):

$$\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)v_1 = \quad \frac{1}{p_0}\left(\frac{V}{k_2}\frac{dU}{dt}+\frac{U}{\varDelta}\right)$$
$$\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)v_2 = -\frac{1}{p_0}\left(\frac{V}{k_2}\frac{dU}{dt}+\frac{U}{\varDelta}\right).$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (21), so erhält man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für W. Die beiden Constanten der Integration bestimmen sich aus den Anfangswerthen von W und U, die selbst mit Hülfe von (23) und (25) aus den Anfangswerthen von P_1', P_1'', P_2', P_2'' zu berechnen sind, welche auch dazu dienen müssen, um die in der Differentialgleichung vorkommenden Constanten Π_1 und Π_2 durch die Gleichungen (22) zu ermitteln.

Wenn die gefundene Differentialgleichung auch nicht integrirt werden kann, so lässt sie sich doch benutzen, um die in ihr vorkommende Constante k aus Beobachtungen zu bestimmen und die Theorie, aus der sie hergeleitet ist, zu prüfen. Für beliebige Werthe von t kann man durch die Beobachtung U finden und dann durch mechanische Quadratur W und durch eine Interpolationsformel dU/dt ermitteln. Setzt man irgend welche zusammengehörige Werthe dieser drei Functionen in die Differentialgleichung ein, so kann man aus ihr k berechnen, vorausgesetzt, dass die anderen in ihr vorkommenden Constanten bekannt sind.

4. In Betreff der Anfangswerthe von P_1', P_1'', P_2', P_2'' soll nun angenommen werden, dass für $t = 0$:

$$P_1' = \Pi, \quad P_1'' = 0, \quad P_2' = 0, \quad P_2'' = \Pi$$

ist; nach (22) ist dann:

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi,$$

und nach (23) und (25) für $t = 0$:

$$U = 0 \quad \text{und} \quad W = 0.$$

Bei Rücksicht auf (26) gibt hiernach die Gleichung (21) für $t = 0$:

$$\text{(28)} \qquad \frac{1}{p_0 k} V\varDelta \frac{dU}{dt} = \log \frac{p_0 k + \Pi k_2}{p_0 k + \Pi k_1}.$$

In einem gewissen Augenblick wird der absolute Werth von U ein Maximum; man erhält eine Relation zwischen den Werthen, die U und W in diesem Augenblick haben, wenn

man in der Gleichung (21) $dU/dt = 0$ setzt. Bequemer, als aus dieser Gleichung (die eine identische wird, wenn man unmittelbar die genannte Substitution macht), findet man jene Relation aber durch Betrachtungen, die an die Gleichungen (1) zu knüpfen sind. Addirt man diese Gleichungen, nachdem sie mit den Factoren:

$$\frac{p_1 + p_2}{k} + \frac{\alpha p_0}{k_2}, \qquad \frac{p_1 + p_2}{k} + \frac{\alpha p_0}{k_1}$$

multiplicirt sind, so erhält man:

$$(29) \qquad \begin{cases} \frac{p_1 + p_2}{k} \frac{\partial(p_1 + p_2)}{\partial x} + \alpha p_0 \left(\frac{1}{k_2} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{1}{k_1} \frac{\partial p_2}{\partial x} \right) \\ = -(v_1 + v_2)\, \alpha p_0 \left(\frac{1}{k} \left(\frac{p_1}{k_1} + \frac{p_2}{k_2} \right) + \frac{\alpha p_0}{k_1 k_2} \right). \end{cases}$$

Ist nun $v_1 + v_2 = 0$, wie es der Fall ist, wenn das Maximum oder Minimum von U stattfindet, so ist diese Gleichung integrabel und gibt, wenn man sie zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = \Delta$ integrirt und statt der Drucke im Diaphragma die Drucke in den Kammern einführt:

$$\frac{1}{2kp_0}(P''^2 - P'^2) + \frac{P_1'' - P_1'}{k_2} + \frac{P_2'' - P_2'}{k_1} = 0.$$

Nach (27) ist aber:

$$P'' + P' = 2\Pi + \frac{V'' - V'}{V'' + V'} U, \quad P'' - P' = -U,$$

$$\frac{P_1'' - P_1'}{k_2} + \frac{P_2'' - P_2'}{k_1} = \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right) \Pi - \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) U - \frac{W}{V\Delta},$$

und daher:

$$(30) \; \frac{1}{k p_0} \left(\Pi + \frac{V'' - V'}{V'' + V'} \frac{U}{2} \right) U + \frac{W}{V\Delta} + \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) U - \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right) \Pi = 0.$$

Die Summe $v_1 + v_2$ verschwindet auch für $t = \infty$, weil dann jeder der beiden Summanden verschwindet. Auch für diesen Fall gelten also die an die Gleichung (29) geknüpften Schlüsse, besteht also die Gleichung (30). Hier ist aber $U = 0$; bezeichnet man durch W_∞ den Werth von W für $t = \infty$, so ist also:

$$(31) \qquad W_\infty = \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right) \Pi V \Delta.$$

Diese Gleichung folgt übrigens aus den Gleichungen (27) allein, wenn man benutzt, dass für $t = \infty$:

$$P_1' = P_1'' \quad \text{und} \quad P_2' = P_2''$$

ist, ohne dass man die Gleichung (21) oder eine ihr äquivalente zu Hülfe zieht.

Soll die Gleichung (31) an den Beobachtungen geprüft werden, so ist es wünschenswerth, einen Ausdruck der Function W für grosse Werthe der Zeit zu haben, um aus dem Werth von W für ein grosses t seinen Werth für $t = \infty$ berechnen zu können. Man erreicht diesen Zweck leicht mit Hülfe der Gleichung (29). Für ein grosses t sind v_1 und v_2 nur klein, und nach (1) also auch die Aenderungen nur klein, die p_1 und p_2 innerhalb des Diaphragmas erleiden. Auf der rechten Seite der Gleichung (29) darf man daher p_1 und p_2 als constant betrachten und resp. den Werthen gleichsetzen, die $\alpha P_1'$ oder $\alpha P_1''$ und $\alpha P_2'$ oder $\alpha P_2''$ für $t = \infty$ annehmen, d. h. man darf nach (27) setzen:

$$p_1 = \alpha \Pi \frac{V}{V''}, \qquad p_2 = \alpha \Pi \frac{V}{V'}.$$

Integrirt man dann wieder die Gleichung (29) zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = \Delta$, setzt für $v_1 + v_2$ seinen Werth aus (24), vernachlässigt das mit dem Factor U^2 behaftete Glied und führt die durch (31) definirte Grösse W_∞ ein, so erhält man für W die lineare Differentialgleichung:

$$W - W_\infty + a\frac{dW}{dt} + b\frac{d^2W}{dt^2} = 0,$$

wo:

$$a = V\Delta\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{\Pi}{kp_0}\right),$$

$$b = V^2\Delta^2\left(\frac{1}{k_1 k_2} + \frac{\Pi}{kp_0}\,\frac{\frac{V'}{k_1} + \frac{V''}{k_2}}{V' + V''}\right).$$

Das allgemeine Integral derselben ist:

$$W_\infty - W = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t},$$

wo λ_1 und λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$1 - a\lambda + b\lambda^2 = 0$$

sind, d. h. $1/\lambda_1$ und $1/\lambda_2$ die Ausdrücke haben:

$$\frac{V\Delta}{2}\left\{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{\Pi}{k p_0}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)^2+\frac{\Pi^2}{k^2 p_0^2}-2\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)\frac{\Pi}{k p_0}\frac{V'-V''}{V'+V''}}\right\},$$

welche Ausdrücke stets reell und positiv sind, da es k_1, k_2, V', V'' sind. Ist die Zeit gross genug, so wird hiernach:

$$W_\infty - W = C_1 e^{-\lambda_1 t},$$

wo λ_1 die kleinere der beiden Wurzeln ist, also:

$$U = \lambda_1 C_1 e^{-\lambda_1 t},$$

mithin:

$$W_\infty = W + \frac{U}{\lambda_1}.$$

---

7. Ueber die Formänderung, die ein fester elastischer Körper erfährt, wenn er magnetisch oder diëlectrisch polarisirt wird; von G. Kirchhoff.

Sitzber. der k. Acad. d. Wiss. zu Berlin vom 28. Febr. 1884, p. 137.
Wied. Ann. Bd. 24 p. 52, 1885.

Am 17. Februar 1881 hat Hr. v. Helmholtz der Academie eine Mittheilung über die Kräfte gemacht, welche auf die Theile von magnetisch oder diëlectrisch polarisirten Körpern wirken, und Ausdrücke für diese Kräfte mit Hülfe des Princips von der Erhaltung der Energie aus der Annahme abgeleitet, dass Poisson's Theorie des inducirten Magnetismus für starre Körper im Luftraume richtig ist und sich übertragen lässt auf diëlectrisch polarisirbare Nichtleiter. Die Resultate, zu denen er gelangt, stimmen im übrigen mit den schon früher von Sir W. Thomson und Cl. Maxwell entwickelten überein; nur enthalten sie neben der Inductionsconstanten noch eine zweite von der Natur des Mittels abhängige Grösse, die bestimmt ist durch die Aenderung, die jene bei einer Aenderung der Dichtigkeit erfährt. Es hat Hr. v. Helmholtz bei seinen Betrachtungen vorzugsweise Flüssigkeiten im Auge gehabt. Bei festen Körpern ist zu vermuthen, dass jene Kräfte mitbedingt sein werden durch

eine dritte Constante, die eingeführt werden muss, wenn man die Aenderung ausdrücken will, die die Induction durch Dilatationen erfährt, welche in verschiedenen Richtungen verschieden sind. Es soll im Folgenden diese Vermuthung geprüft und dann die allgemeine Theorie auf einen einfachen Fall angewandt werden.[1])

1. Es möge mit einer Betrachtung begonnen werden, die ähnlich einer ist, durch welche die allgemeinen Gleichungen der Poisson'schen Theorie des inducirten Magnetismus begründet zu werden pflegen, und die zeigen soll, wie der magnetische Zustand zu bestimmen ist, den unter dem Einfluss gegebener magnetisirender Kräfte eine Eisenmasse annimmt, deren Theilchen beliebig gegebene, unendlich kleine Verschiebungen aus Lagen erfahren haben, bei denen die Masse in ihrem natürlichen Zustande sich befand.

Man denke sich eine Kugel aus Eisen, welche in drei aufeinander senkrechten Richtungen die überall gleichen, als unendlich klein zu betrachtenden Dilatationen λ_1, λ_2, λ_3 erlitten hat. Wirkt auf diese Kugel eine constante magnetische Kraft, deren Intensität J_1 ist, in der Richtung von λ_1, so wird die magnetische Axe derselben auch die Richtung von λ_1 haben, und ist μ_1 ihr magnetisches Moment, bezogen auf die Volumeneinheit, so wird man:

$$\mu_1 = (p - p'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - p''\lambda_1) J_1$$

setzen dürfen, wo p, p', p'' Constanten sind, d. h. nur von der Natur des Eisens und, wie hier noch als möglich angenommen werden muss, von der Grösse der Kugel abhängen können. Wirken gleichzeitig auf die Kugel in den Richtungen von λ_1, λ_2, λ_3 constante magnetische Kräfte, deren Intensitäten J_1, J_2, J_3 sind, und bedeuten nun μ_1, μ_2, μ_3 die auf die Volumeneinheit bezogenen magnetischen Momente der Kugel für

1) Bei der Correctur dieser Mittheilung erhalte ich das Februarheft von Wiedemann's Annalen, in dem sich eine Arbeit von Hrn. Lorberg „über Electrostriction" befindet; Bd. 21. p. 300. Es bezieht sich diese auf denselben Gegenstand, der hier abgehandelt ist, und führt durch Betrachtungen von anderer Form zu gleichen Resultaten.

dieselben Richtungen, so gilt auch jetzt noch diese Gleichung, und es ist:

$$\mu_2 = (p - p'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - p''\lambda_2) J_2$$

und:

$$\mu_3 = (p - p'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - p''\lambda_3) J_3 .$$

Nun sei die gedachte Kugel ein unendlich kleiner Theil einer endlichen Eisenmasse, deren Punkte beliebig relative Verschiebungen erlitten haben, und die durch gegebene äussere Kräfte magnetisirt ist, welche von einem permanenten Magnet herrühren mögen. Sie befindet sich dann unter den eben vorausgesetzten Verhältnissen. λ_1, λ_2, λ_3 sind ihre Hauptdilatationen; es seien s_1, s_2, s_3 die Coordinaten eines Punktes in ihr in den Richtungen der Hauptdilatationen, V das Potential der äusseren magnetischen Kräfte, Q das Potential der ganzen, magnetisch gewordenen Eisenmasse in Bezug auf diesen Punkt und:

$$\varphi = V + Q .$$

Es ist dann:

$$J_1 = \frac{4\pi}{3}\mu_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial s_1}, \quad J_2 = \frac{4\pi}{3}\mu_2 - \frac{\partial \varphi}{\partial s_2}, \quad J_3 = \frac{4\pi}{3}\mu_3 - \frac{\partial \varphi}{\partial s_3}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Ausdrücke von μ_1, μ_2, μ_3, so erhält man Gleichungen, aus denen zunächst zu schliessen ist, dass p, p', p'' von dem Radius der Kugel unabhängig sind, da alle anderen, in ihr vorkommenden Grössen von diesem Radius nicht abhängen. Setzt man:

$$\frac{p}{1 - \frac{4\pi}{3}p} = k, \quad \frac{p'}{\left(1 - \frac{4\pi}{3}p\right)^2} = k', \quad \frac{p''}{\left(1 - \frac{4\pi}{3}p\right)^2} = k'',$$

und vernachlässigt Grössen von der Ordnung der Quadrate von λ_1, λ_2, λ_3, so erhält man aus ihnen weiter:

$$\mu_1 = -\left(k - k'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - k''\lambda_1\right)\frac{\partial \varphi}{\partial s_1},$$

$$\mu_2 = -\left(k - k'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - k''\lambda_2\right)\frac{\partial \varphi}{\partial s_2},$$

$$\mu_3 = -\left(k - k'(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - k''\lambda_3\right)\frac{\partial \varphi}{\partial s_3}.$$

Man bezeichne nun die Coordinaten des Punktes (s_1, s_2, s_3) in Bezug auf ein beliebiges, rechtwinkliges Coordinatensystem

durch x, y, z, die Cosinus der Winkel, welche die Axen der s_1, s_2, s_3 mit den Axen der x, y, z bilden, durch:

$$a_1,\ b_1,\ c_1, \quad a_2,\ b_2,\ c_2, \quad a_3,\ b_3,\ c_3,$$

und die auf die Volumeneinheit bezogenen magnetischen Momente für die Axen der x, y, z durch α, β, γ; man hat dann:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_1} = a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + c_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \mu_1 = a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1 \gamma,$$

und die Gleichungen, die aus diesen entstehen, wenn statt des Index 1 der Index 2 oder 3 gesetzt wird. Es seien ferner u, v, w die unendlich kleinen Verrückungen, die der materielle Punkt, welcher am Orte (x, y, z) sich befindet, erlitten hat, während die Dilatationen λ_1, λ_2, λ_3 erzeugt wurden; dann gelten die Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_1^2 \lambda_1 + a_2^2 \lambda_2 + a_3^3 \lambda_3,$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = b_1 c_1 \lambda_1 + b_2 c_2 \lambda_2 + b_3 c_3 \lambda_3,$$

und diejenigen, die aus ihnen entstehen, wenn x, y, z und u, v, w und a, b, c cyklisch vertauscht werden. Multiplicirt man die Gleichungen für μ_1, μ_2, μ_3 mit a_1, a_2, a_3 oder mit b_1, b_2, b_3 oder mit c_1, c_2, c_3 und addirt sie jedesmal, so erhält man infolge hiervon:

$$\alpha = -a_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - a_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - a_{13}\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\beta = -a_{21}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - a_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - a_{23}\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\gamma = -a_{31}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - a_{32}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - a_{33}\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

wo:

$$a_{11} = k - k'\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - k''\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$a_{22} = k - k'\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - k''\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$a_{33} = k - k'\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - k''\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$a_{23} = a_{32} = -\frac{k''}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$a_{31} = a_{13} = -\frac{k''}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$a_{12} = a_{21} = -\frac{k''}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen sind nun die Bedingungen abzuleiten, denen gemäss das Gesammtpotential φ zu bestimmen ist. Man hat:

$$Q = \int d\tau\left(\alpha\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + \beta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right).$$

wo $d\tau$ ein Element des vom Eisen eingenommenen Raumes bezeichnet, dessen Coordinaten x, y, z sind, und r die Entfernung dieses von dem Punkte, auf den Q sich bezieht. Durch partielle Integration kann man den Ausdruck von Q in die Summe zweier Potentiale verwandeln, von denen das eine herrührt von Massen, die den Raum des Eisens erfüllen, das andere von Massen, die seine Oberfläche bedecken. Des letzteren wegen erleiden die ersten Differentialquotienten von Q, also auch die von φ, an der Oberfläche des Eisens Sprünge. Um die Darstellung zu vereinfachen, soll ein Kunstgriff benutzt werden, dessen sich auch Hr. v. Helmholtz bedient hat. Es soll die Vorstellung zu Grunde gelegt werden, dass das Eisen allmählich in die Luft übergeht, die Grössen a_{11}, a_{12}, . . also stetig von den Werthen, die im Innern des Eisens ihnen zukommen, bis Null abnehmen, welchen Werth sie in der Luft haben. Erst später soll dann die Annahme eingeführt werden, dass dieser Uebergang sich in einer unendlich dünnen Schicht vollzieht. Von der Oberfläche des Eisens kann dann hier im eigentlichen Sinne nicht gesprochen werden; mit diesem Namen soll aber eine Fläche belegt werden, die das Eisen einschliesst, für die schon überall jene Coëfficienten a_{11}, a_{12}, . . $= 0$ sind, und die, wenn der Uebergang als ein plötzlicher angenommen werden wird, in die wirkliche Oberfläche des Eisens fallen soll. Für die „Oberfläche“ des Eisens ist dann $\alpha = \beta = \gamma = 0$, und es wird daher:

$$Q = -\int \frac{d\tau}{r}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right).$$

Macht man in Betreff der Begrenzung des Magnets, dessen Potential V genannt worden ist, die entsprechende Annahme, so ist Q und V, also auch φ mit seinen ersten Differentialquotienten im ganzen Raume stetig und, erstrecken sich weder Eisen noch Magnet in die Unendlichkeit, so ist überdies in der Unendlichkeit $\varphi = 0$. Es ist φ aus diesen Bedingungen und einer partiellen Differentialgleichung, der im ganzen Raume genügt werden muss, zu bestimmen. Diese findet man, wenn man erwägt, dass aus dem letzten für Q angegebenen Ausdruck folgt:

$$\Delta Q = 4\pi\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right),$$

und dass andererseits:

$$\Delta Q = \Delta \varphi - \Delta V$$

ist. Substituirt man in die hieraus sich ergebende Gleichung für α, β, γ die gefundenen Werthe, so erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\varphi}{4\pi} &+ \frac{\partial}{\partial x}\left(a_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + a_{13}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left(a_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + a_{23}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\\ &+ \frac{\partial}{\partial z}\left(a_{31}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + a_{32}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + a_{33}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \frac{\Delta V}{4\pi}.\end{aligned}$$

Für jeden der drei Theile, in welche der ganze Raum zerlegt werden kann, nämlich für das Eisen, den Magnet und den Luftraum, nimmt diese Gleichung eine einfachere Gestalt infolge davon an, dass nur im Eisen die Grössen a_{11}, a_{12} ... von Null verschieden sind und nur im Magnet ΔV nicht = Null ist. Für das Eisen ist daher die rechte Seite der Gleichung = Null, für den Magnet ist die Gleichung:

$$\Delta\varphi = \Delta V$$

und für den Luftraum: $\Delta\varphi = 0$.

Die allgemeine für φ gefundene Differentialgleichung lässt sich ersetzen durch eine Gleichung, die ausspricht, dass die Variation eines gewissen Integrals verschwindet. Man

verstehe unter $\delta\varphi$ einen unendlich kleinen Zuwachs der Function φ, der, wie diese, mit seinen Differentialquotienten überall stetig ist und in der Unendlichkeit verschwindet; man multiplicire die Differentialgleichung für φ mit $\delta\varphi$ und mit dem Raumelement $d\tau$ und integrire über einen Raum, der durch eine Fläche begrenzt ist, die ganz in der Unendlichkeit liegt. Die Gleichung, die man dann erhält, lässt sich durch partielle Integrationen in die Form bringen:

$$0 = \delta W - \frac{1}{4\pi}\int ds \frac{\partial \varphi}{\partial n}\delta\varphi ,$$

wo:

$$W = -\int d\tau \left\{\frac{1}{4\pi}\varphi \Delta V + \frac{1}{8\pi}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right) + G\right\}$$

$$2G = a_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + a_{22}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + a_{33}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2$$

$$+ 2a_{23}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + 2a_{31}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + 2a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

ist, δW den Zuwachs bedeutet, den W dadurch erfährt, dass φ und $\delta\varphi$ wächst, ds ein Element der unendlich grossen Grenzfläche und n die nach Innen gekehrte Normale von ds ist.[1]) Daraus, dass φ mit seinen ersten Differentialquotienten überall stetig ist, in der Unendlichkeit verschwindet, und $\Delta\varphi$ nur in einem Raume, der sich nicht in die Unendlichkeit erstreckt, von Null verschieden ist, folgt aber:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{d\tau}{r}\Delta\varphi$$

und dann weiter, dass, wenn die Abstände der Elemente der gewählten Grenzfläche von einem im Endlichen liegenden Punkte von der Ordnung der unendlich grossen Länge R sind, in ihr die Werthe von φ mindestens von der Ordnung von $1/R$ und die Werthe von $\partial\varphi/\partial n$ mindestens von der Ordnung

1) Beiläufig möge bemerkt werden, dass

$$2G = -\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \beta\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

also auch bei der eben gebrauchten Bezeichnung:

$$= -\mu_1\frac{\partial\varphi}{\partial s_1} - \mu_2\frac{\partial\varphi}{\partial s_2} - \mu_3\frac{\partial\varphi}{\partial s_3} \quad \text{ist.}$$

von $1/R^2$ unendlich klein sind. Hieraus ergibt sich endlich, dass das zu δW hinzugefügte Integral verschwindet, wenn, wie es sein soll, $\delta\varphi$ in der Unendlichkeit verschwindet, dass also:

$$0 = \delta W \text{ ist.}$$

Der für W aufgestellte Ausdruck soll noch einer Transformation unterworfen werden. Indem man erwägt, dass φ und seine ersten Differentialquotienten überall stetig und in der Unendlichkeit von den eben angegebenen Grössenordnungen unendlich klein sind, findet man durch partielle Integrationen

$$\int d\tau \left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right) = -\int d\tau\, \varphi\, \Delta\varphi\,,$$

wo die Integrale über einen Raum auszudehnen sind, dessen Grenze ganz in der Unendlichkeit liegt. Durch Substitution hiervon ergibt sich, wenn man noch durch $d\tau_e$, $d\tau_m$, $d\tau_l$ Elemente des Eisens, des Magnets und des Luftraumes bezeichnet:

$$W = -\int d\tau_e \left(G - \frac{1}{8\pi}\varphi\,\Delta\varphi\right) - \int d\tau_m \left(\frac{1}{4\pi}\varphi\,\Delta V - \frac{1}{8\pi}\varphi\,\Delta\varphi\right)$$
$$+ \int d\tau_l \frac{1}{8\pi}\varphi\,\Delta\varphi\,.$$

2. Es soll nun durch Betrachtungen, die im wesentlichen denen ganz gleich sind, durch die Hr. v. Helmholtz zu seinen Resultaten gelangt ist, gezeigt werden, in welcher Beziehung die Grösse W zur Energie der aus dem Eisen und dem Magnet gebildeten Systeme steht, und wie aus ihrem Ausdrucke auf die Kräfte geschlossen werden kann, die auf die Elemente des Eisens infolge seiner Magnetisirung wirken. Zu diesem Zwecke soll zunächst der Zuwachs δW berechnet werden, den W erhält, wenn der Magnet eine unendlich kleine Aenderung seiner Lage erfährt, alle Punkte des Eisens aber unverrückt bleiben. Um den Werth zu berechnen, den W nach der Verrückung des Magnets besitzt, ist es nicht nöthig, den wahren Werth zu benutzen, den dann φ in jedem Punkte des Raumes hat; es ist gestattet, einen anzuwenden, der von diesem um etwas unendlich Kleines abweicht, wenn er nur, wie dieser, mit seinen ersten Differentialquotienten überall stetig ist und in der Unendlichkeit verschwindet, da, wie im vorigen Paragraph

bewiesen, unter dieser Bedingung alle Annahmen über φ zu demselben Werthe von W führen. Es darf daher angenommen werden, dass nach der Verschiebung des Magnets in jedem materiellen Punkte des Eisens, des Magnets und der Luft $\Delta\varphi$ den ursprünglichen Werth behalten hat, wodurch dann das neue φ überall vollständig bestimmt ist. Die Vergrösserung, die sich dabei für das auf irgend einen materiellen Punkt bezogene φ ergibt, sei $\delta\varphi$; die entsprechende Vergrösserung von G sei δG. Variirt man den für $2G$ aufgestellten Ausdruck und führt dann die Grössen α, β, γ ein, so findet man:

$$\delta G = -\alpha \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} - \beta \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \delta \varphi}{\partial z}$$

und daher, weil in der Oberfläche des Eisens α, β und $\gamma = 0$ sind:

$$\int d\tau_e \, \delta G = \int d\tau_e \, \delta\varphi \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right),$$

oder wegen der Differentialgleichung, der φ im Eisen genügt:

$$= \int d\tau_e \, \frac{1}{4\pi} \, \delta\varphi \, \Delta\varphi .$$

Erwägt man noch, dass für alle Punkte des Magnets $\Delta\varphi = \Delta V$ und für alle Punkte des Luftraums $\Delta\varphi = 0$ ist, so ergibt sich:

$$-\delta W = \frac{1}{8\pi} \int d\tau_e \, \delta\varphi \, \Delta\varphi + \frac{1}{8\pi} \int d\tau_m \, \delta\varphi \, \Delta\varphi .$$

Diese beiden Integrale sind einander gleich; es ist nämlich allgemein:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{dr}{r} \Delta\varphi ,$$

wo die Integration über das Eisen und den Magnet auszudehnen ist, also in dem ersten jener beiden Integrale:

$$\delta\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int d\tau_m \, \delta \frac{1}{r} \, \Delta\varphi$$

und in dem zweiten:

$$\delta\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int d\tau_e \, \delta \frac{1}{r} \, \Delta\varphi ,$$

also ein jedes von ihnen:

$$= -\tfrac{1}{2}\int\int d\tau_m\, d\tau_e\, \delta\frac{1}{r}\frac{\Delta\varphi_m}{4\pi}\frac{\Delta\varphi_e}{4\pi},$$

wo $\Delta\varphi_e$ sich auf den Ort von $d\tau_e$, $\Delta\varphi_m$ auf den Ort von $d\tau_m$ bezieht, und r der Abstand dieser beiden Elemente ist. Es ist also:

$$\delta W = +\int\int d\tau_m\, d\tau_e\, \delta\frac{1}{r}\frac{\Delta\varphi_m}{4\pi}\frac{\Delta\varphi_e}{4\pi}.$$

Dieser Ausdruck stellt aber die Arbeit dar, die fremde Kräfte der magnetischen Anziehung entgegen leisten müssen, um die gedachte Verschiebung des Magnets hervorzubringen; es ist also δW die dieser Verschiebung entsprechende Vergrösserung der Energie des aus dem Eisen und dem Magnet bestehenden Systemes, und W selbst diese Energie (abgesehen von einer additiven Constanten) für Zustände, die von einander durch die Lage des Magnets sich unterscheiden. In dem Falle, dass der Magnet in unendlich grosse Entfernung von dem Eisen gerückt ist, ist W nur von dem Magnet, nicht von dem Eisen abhängig.

Nun sollen Zustände ins Auge gefasst werden, die dadurch entstehen, dass die Theile des Eisens beliebige unendlich kleine Verrückungen erleiden. Bei einem solchen Zustande seien ξ, η, ζ die Verrückungen, die derjenige materielle Punkt, der ursprünglich die Coordinaten x, y, z besitzt, erfahren hat. Auf zwei Weisen denke man sich diesen Zustand aus dem ursprünglichen durch fremde Kräfte, die man auf die Elemente des Eisens wirken lässt, hervorgerufen: das einemal soll es geschehen, während der Magnet an seinem Orte sich befindet; das anderemal soll der Magnet durch fremde Kräfte vorher in die Unendlichkeit geführt sein und nachher an seinen Ort zurückgebracht werden. Nach dem Princip von der Erhaltung der Energie muss die Arbeit der fremden Kräfte in beiden Fällen die nämliche sein. Die Arbeit, welche zum Transport des Magnets in die Unendlichkeit und zurück aufgewendet werden musste, ist die Vergrösserung δW, welche W infolge der Verschiebungen ξ, η, ζ erfährt; um soviel kleiner muss die Arbeit der auf die Theile des Eisens wirkenden fremden Kräfte in dem zweiten Falle, als in dem ersten

sein. Bezeichnet man diese Kräfte, bezogen auf die Volumeneinheit, in dem Falle, dass der Magnet an seinem Orte ist, durch X, Y, Z, und in dem Falle, dass der Magnet entfernt ist, durch X_0, Y_0, Z_0, so hat man also die Gleichung:

$$\delta W = \int d\tau_e \big((X - X_0)\xi + (Y - Y_0)\eta + (Z - Z_0)\zeta\big);$$

bringt man δW auf die Form:

$$\delta W = -\int d\tau_e (A\xi + B\eta + C\zeta),$$

so sind daher $A d\tau_e$, $B d\tau_e$, $C d\tau_e$ die inneren Kräfte, welche auf das Element $d\tau_e$ mehr wirken, wenn der Magnet anwesend ist, als wenn er fehlt; es sind die magnetischen Kräfte, welche auf das Eisenelement ausgeübt werden.

Um hiernach A, B, C zu berechnen, muss man den Werth ermitteln, den W nach Eintritt der Verschiebungen ξ, η, ζ besitzt; dabei darf man wegen der Eigenschaft von W, die im § 1 bewiesen ist, statt des wahren Werthes von φ wiederum einen nehmen, der von diesem um unendlich Kleines verschieden ist. Es kann und soll für jeden Punkt des Raumes der Werth von φ angenommen werden, der hier galt, bevor die Verschiebungen stattfanden. Es wird dann δW gleich der Vergrösserung, die

$$-\int G\, d\tau_e,$$

dadurch erfährt, dass k, k', k'' und u, v, w in jedem Raumelemente des Eisens bei den Verschiebungen sich ändern. In dem Punkte des Raumes (x, y, z) befindet sich nach den Verschiebungen der materielle Punkt, der vor denselben am Orte $(x - \xi, y - \eta, z - \zeta)$ sich befand; es haben dort k, k', k'' also die Zunahmen:

$$-\frac{\partial k}{\partial x}\xi - \frac{\partial k}{\partial y}\eta - \frac{\partial k}{\partial z}\zeta, \quad -\frac{\partial k'}{\partial x}\xi - \frac{\partial k'}{\partial y}\eta - \frac{\partial k'}{\partial z}\zeta,$$
$$-\frac{\partial k''}{\partial x}\xi - \frac{\partial k''}{\partial y}\eta - \frac{\partial k''}{\partial z}\zeta$$

erhalten; die Verschiebungen, die derselbe materielle Punkt erfahren hat, während das Eisen aus demjenigen Zustande, in dem keine Dilatationen vorhanden waren, in den Zustand

überging, in dem es nach den Verschiebungen ξ, η, ζ sich befindet, sind $u+\xi$, $v+\eta$, $w+\zeta$, d. h. ξ, η, ζ sind die Vergrösserungen, die u, v, w infolge der Verschiebungen ξ, η, ζ erlitten haben. Es hat hiernach keine Schwierigkeit, durch Gleichsetzung der Coëfficienten von ξ, η, ζ in δW und in dem Integrale, durch welches A, B, C eingeführt sind, Ausdrücke für diese Kräfte zu bilden. Dieselben werden wesentlich vereinfacht, wenn man benutzt, dass u, v, w unendlich klein sind, annimmt, dass k' und k'' endlich wie k sind, und nur Endliches berücksichtigt. Da an der Oberfläche des Eisens k' und $k''=o$ sind, so erhält man dann:

$$\begin{aligned} A = &-\tfrac{1}{2}\frac{\partial k}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)\\ &+\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}k'\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)\\ &+\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}k''\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}k''\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}k''\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{aligned}$$

und ähnliche Ausdrücke für B und C.

Es lassen sich diese Ausdrücke auf die folgende Weise umformen. Die Differentialgleichung, der φ im Eisen genügt, ist, wenn man auch in ihr unendlich Kleines gegen Endliches vernachlässigt:

$$\frac{\partial}{\partial x}(1+4\pi k)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}(1+4\pi k)\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}(1+4\pi k)\frac{\partial\varphi}{\partial z}=o;$$

multiplicirt man sie mit $\partial\varphi/\partial x$ und formt das Resultat um, so erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi}+k\right)\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)\\ &-2\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi}+k\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{4\pi}+k\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{4\pi}+k\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\}.\end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser Gleichung und der beiden ähnlichen, die sich ihr an die Seite setzen lassen, erhält man:

$$A=-\frac{\partial A_x}{\partial x}-\frac{\partial A_y}{\partial y}-\frac{\partial A_z}{\partial z},\qquad B=-\frac{\partial B_x}{\partial x}-\frac{\partial B_y}{\partial y}-\frac{\partial B_z}{\partial z},$$

$$C=-\frac{\partial C_x}{\partial x}-\frac{\partial C_y}{\partial y}-\frac{\partial C_z}{\partial z},\qquad \text{wenn:}$$

$$A_x = -\left(\frac{1}{4\pi}+k+\frac{k''}{2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi}+k-k'\right)\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right),$$

$$B_y = -\left(\frac{1}{4\pi}+k+\frac{k''}{2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi}+k-k'\right)\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right),$$

$$C_z = -\left(\frac{1}{4\pi}+k+\frac{k''}{2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2+\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi}+k-k'\right)\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right),$$

$$B_z = C_y = -\left(\frac{1}{4\pi}+k+\frac{k''}{2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$C_x = A_z = -\left(\frac{1}{4\pi}+k+\frac{k''}{2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$A_y = B_x = -\left(\frac{1}{4\pi}+k+\frac{k''}{2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Daraus geht hervor, dass die Kräfte A, B, C sich ersetzen lassen durch die Druckkräfte A_x, A_y, B_x . . . , wo A_y z. B. die x-Componente des auf die Flächeneinheit bezogenen Druckes bedeutet, die in einem auf der y-Axe senkrechten Flächenelement auf die Masse auf derjenigen Seite des Elementes wirkt, nach welcher die y-Ordinaten wachsen.

Die Druckcomponenten A_x, A_y . . , können auch auf die Punkte des Luftraumes, in dem $k = k' = k'' = 0$ sind, bezogen werden und haben auch hier von Null verschiedene Werthe, während die Kräfte A, B, C im Luftraume verschwinden.

Die hier entwickelten Ausdrücke gehen, abgesehen von einer Verschiedenheit der Bezeichnung, in die von Herrn von Helmholtz gefundenen über, wenn man $k'' = 0$ setzt.

Solange wurde der Uebergang des Eisens in die umgebende Luft als ein allmählicher vorausgesetzt; es soll nun die Annahme eingeführt werden, dass dieser Uebergang in einer unendlich dünnen Schicht sich vollzieht, und dass innerhalb des Eisens k, k', k'' constant sind. Infolge des letzteren Umstandes findet man:

$$A = +\tfrac{1}{2}\left(k'+\frac{k''}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)$$

mit zwei ähnlichen Ausdrücken für B und C. Zu diesen Kräften, welche auf das Innere des Eisens wirken, kommen aber noch solche hinzu, die auf die Elemente seiner Oberfläche

ausgeübt werden. Ihre Componenten, bezogen auf die Flächeneinheit, seien $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$. Um diese zu finden, behalte man die eingeführten Zeichen in Bezug auf das Eisen bei, bezeichne die entsprechenden, auf die Luft bezogenen Grössen durch mit einem Strich versehene Buchstaben; man nenne ferner n eine nach dem Innern des Eisens gerichtete Normale seiner Oberfläche. Aus der Differentialgleichung, der bei stetiger Veränderlichkeit von k die Function φ genügt, folgt dann, dass, bei der nun gemachten Annahme, an der Oberfläche des Eisens:

$$(1 + 4\pi k)\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi'}{\partial n} \text{ und } \varphi = \varphi'$$

ist, woraus sich weiter ergibt:

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 4\pi k \frac{\partial \varphi}{\partial n}\cos(nx), \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + 4\pi k \frac{\partial \varphi}{\partial n}\cos(ny),$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + 4\pi k \frac{\partial \varphi}{\partial n}\cos(nz).$$

Ferner hat man:

$$\overline{A} = A_n' - A_n,$$

$$A_n = A_x \cos(nx) + A_y \cos(ny) + A_z \cos(nz),$$

$$A_n' = A_x' \cos(nx) + A_y' \cos(ny) + A_z' \cos(nz),$$

$$A_x' = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{8\pi}\left(\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial z}\right)^2\right),$$

$$A_y' = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \varphi'}{\partial x}\frac{\partial \varphi'}{\partial y}, \qquad A_z' = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \varphi'}{\partial x}\frac{\partial \varphi'}{\partial z}.$$

Daraus findet man:

$$\overline{A} = -2\pi k^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)^2 \cos(nx)$$

$$-\frac{k-k'}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right)\cos(nx) + \frac{k''}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

und zwei ähnliche Ausdrücke für $\overline{B}$ und $\overline{C}$.

Es sind diese Ausdrücke durch die Discussion eines Processes gewonnen, der nicht immer ausführbar ist. Es sollte der Magnet in die Unendlichkeit geführt werden, ohne dass dabei das Eisen eine Aenderung der Gestalt oder Lage erlitte; das ist nicht möglich, z. B. wenn das Eisen ein Hohl-

körper ist, in dessen Höhlung der Magnet sich befindet. Aber auch in solchen Fällen werden die für A, B, C und $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ aufgestellten Ausdrücke gelten, da es in Bezug auf die Kräfte, die auf ein Element des Eisens ausgeübt werden, gleichgültig sein muss, wie die magnetischen Flüssigkeiten, welche gewisse Werthe des Gesammtpotentials φ in seinen Punkten hervorbringen, soweit sie in endlicher Entfernung von dem Elemente liegen, vertheilt sind.

Die in Bezug auf einen Eisenkörper angestellten Betrachtungen lassen sich auf ein Diëlectricum übertragen, wenn dieses an Stelle des Eisens und ein electrisirter Nichtleiter an Stelle des Magnets gesetzt wird. Der Nichtleiter kann aber auch durch Leiter ersetzt werden, da es für die Kräfte, die auf ein Element des Diëlectricums wirken, gleichgültig ist, ob die electrischen Flüssigkeiten, von denen diese Kräfte herrühren, soweit sie in endlicher Entfernung von dem Elemente liegen, in ihren Trägern beweglich sind, oder nicht.

Nun ist es leicht, die Differentialgleichungen für die Formänderungen aufzustellen, die ein fester elastischer Körper erfährt, wenn er magnetisch oder diëlectrisch polarisirt wird. Man bezeichne in üblicher Weise durch X_x, X_y, . . die Componenten der durch die Verschiebungen u, v, w hervorgerufenen elastischen Drucke, durch X, Y, Z und $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ die Componenten der auf die Volumeneinheit bezogenen Kräfte und der auf die Flächeneinheit bezogenen Druckkräfte, welche auf das Innere und auf die Oberfläche des Körpers ausgeübt werden und von anderen Ursachen, als der Elasticität und der Polarisirung desselben herrühren; man hat dann für jeden Punkt im Innern des Körpers:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = X + A, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = Y + B,$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = Z + C,$$

und für jedes Element der Oberfläche, wenn n die nach dem Innern des Körpers gerichtete Normale desselben bedeutet:

$$X_n = \overline{X} + \overline{A}, \quad Y_n = \overline{Y} + \overline{B}, \quad Z_n = \overline{Z} + \overline{C}.$$

Dabei ist allgemein, wenn n eine beliebige Richtung bezeichnet:

$$X_n = X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz),$$
$$Y_n = Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz),$$
$$Z_n = Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz),$$

und:

$$X_x = -2K\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \Theta\sigma\right), \qquad Y_z = Z_y = -K\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$
$$Y_y = -2K\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \Theta\sigma\right), \qquad Z_x = X_z = -K\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$
$$Z_z = -2K\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \Theta\sigma\right), \qquad X_y = Y_x = -K\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

wo:

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

und K und Θ die beiden Constanten der Elasticität sind.

3. Es möge eine Betrachtung hier erwähnt werden, durch die man glauben könnte, ebenfalls zur Kenntniss der A, B, C genannten Kräfte zu gelangen, die aber nicht zu diesem Ziele führt.

Man stelle sich einen durch eine geschlossene Fläche begrenzten Theil des magnetisch oder diëlectrisch polarisirten Körpers vor und berechne die Summe der x-Componenten der Kräfte, welche auf diesen Theil von allen ausserhalb desselben befindlichen magnetischen oder electrischen Flüssigkeiten ausgeübt werden. Die in ihm enthaltenen Flüssigkeiten können dabei ersetzt werden durch eine Schicht an seiner Oberfläche, in der auf das Flächenelement ds die Flüssigkeitsmenge:

$$k\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds$$

kommt, wenn n die nach seinem Inneren gerichtete Normale von ds bedeutet. Die auf diese Schicht wirkenden Kräfte lassen sich aus zwei Theilen zusammensetzen. Für den ersten Theil ist φ das auf einen Pol von der Flüssigkeitsmenge Eins bezogene Potential. Der zweite Theil rührt her von einer Flüssigkeitsschicht, die an der Fläche, deren Element ds genannt worden ist, ausserhalb derselben sich befindet und im Elemente ds die Dichtigkeit:

$$-k\frac{\partial\varphi}{\partial n}$$

besitzt. Es sei U das Potential dieser Schicht in Bezug auf einen Punkt, dessen Entfernung von dem Elemente ds durch r bezeichnet werden möge, sodass:

$$U = -k\int \frac{ds}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}$$

ist, und U_i sei der Werth von U in Bezug auf einen inneren, U_a der in Bezug auf einen äusseren Punkt. Der erste Theil der gesuchten Summe der x-Componenten ist dann:

$$-k\int ds\frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

und der zweite:
$$-k\int ds\frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{\partial U_i}{\partial x}.$$

Dieser zweite Theil lässt sich aber auch noch auf andere Weise ausdrücken. Er ist nämlich gleich der negativ genommenen Summe der x-Componenten derjenigen Kräfte, welche die innere von den beiden betrachteten Schichten auf die äussere ausübt; d. h. er ist:

$$= k\int ds\frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{\partial U_a}{\partial x},$$

also auch:
$$= \frac{k}{2}\int ds\frac{\partial\varphi}{\partial n}\left(\frac{\partial U_a}{\partial x} - \frac{\partial U_i}{\partial x}\right),$$

oder:
$$= -2\pi k^2\int ds\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^2\cos(nx).$$

Man kann hiernach die Summen der Componenten nach den Coordinatenaxen der Kräfte, welche auf die Flüssigkeiten in dem abgegrenzten Theile des Körpers von allen ausserhalb desselben befindlichen Flüssigkeiten ausgeübt werden, berechnen, indem man annimmt, dass auf jedes Element seiner Oberfläche ein Druck wirkt, dessen Componenten, bezogen auf die Flächeneinheit, sind:

$$X_n = -k\frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - 2\pi k^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^2\cos(nx),$$

$$Y_n = -k\frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - 2\pi k^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^2\cos(ny),$$

$$Z_n = -k\frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{\partial\varphi}{\partial z} - 2\pi k^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^2\cos(nz).$$

Eine nahe liegende Hypothese ist nun die, dass hierdurch erschöpfend die magnetischen oder electrischen Kräfte angegeben sind, die auf den gedachten Theil des Körpers wirken. Wäre das richtig, so würde man jene Kräfte A, B, C finden, indem man mit Hülfe dieser Ausdrücke für ein Raumelement des Körpers die Componentensummen ermittelte und durch die Grösse des Raumelementes dividirte; es müssten die Quotienten von Gestalt und Grösse des Raumelementes unabhängig sich ergeben. Das ist nun aber nicht der Fall; ja, im allgemeinen finden sich die Componentensummen nicht als von der Grössenordnung des Raumelementes, sondern als von der seiner Oberfläche. Man sieht das leicht ein, indem man als Raumelement ein Tetraëder wählt, bei dem drei Kanten den Coordinatenaxen parallel sind, und sich überzeugt, dass die Gleichung:

$$X_n = X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz)$$

nicht erfüllt wird. Es ist daraus zu schliessen, dass ausser den durch die Fernwirkung der Flüssigkeiten unmittelbar hervorgerufenen Drucken X_n, Y_n, Z_n auf die Oberfläche des abgegrenzten Theiles infolge der Polarisirung noch andere Drucke wirken. Es fallen diese fort, wenn der Theil von seiner Umgebung durch eine unendlich dünne Luftschicht getrennt ist; sie müssen aber vorhanden sein, wenn die Continuität des Körpers erhalten ist, weil sonst ein Gleichgewicht gar nicht stattfinden könnte.

Hr. Boltzmann hat in seiner Abhandlung[1]) allgemeine Gleichungen aufgestellt, welche für die Deformation eines beliebigen festen elastischen Körpers durch Magnetisirung oder Diëlectrisirung gelten sollen. Den Betrachtungen, durch welche er dieselben ableitet, liegt aber die eben besprochene Hypothese zu Grunde, deren innerer Widerspruch bei dem Wege, den Hr. Boltzmann eingeschlagen hat, nicht hervortritt. Aus den Gesetzen der magnetischen oder electrischen Kräfte und Induction entwickelt er nämlich die Werthe von X_n, Y_n, Z_n nur für die Fälle, dass n mit der Normale der Fläche φ = const. zusammenfällt oder senkrecht darauf ist, und be-

1) Boltzmann, Wien. Ber. 82. p. 1157. 1880.

rechnet aus diesen die allgemeinen Werthe von X_n, Y_n, Z_n durch die Gleichung $X_n = X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz$ und die beiden entsprechenden Gleichungen.

4. Es sollen nun die im § 2 aufgestellten Gleichungen auf den Fall eines Kugelcondensators angewendet werden, der auch von Hrn. Boltzmann[1]) und Korteweg[2]) behandelt ist.

Bezieht man die Zeichen X, Y, Z, $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ auf alle Kräfte und Druckkräfte, die auf die Theile und die Oberfläche des zu betrachtenden Körpers neben den durch die Elasticität hervorgerufenen ausgeübt werden, so sind die Differentialgleichungen für die Verrückungen u, v, w:

$$-\frac{1}{K} X = \Delta u + (1 + 2\,\Theta)\frac{\partial \sigma}{\partial x}, \qquad -\frac{1}{K} Y = \Delta v + (1 + 2\,\Theta)\frac{\partial \sigma}{\partial y},$$
$$-\frac{1}{K} Z = \Delta w + (1 + 2\,\Theta)\frac{\partial \sigma}{\partial z}.$$

Der Körper soll nun eine Glasmasse sein, die durch zwei concentrische Kugelflächen begrenzt ist, und deren Punkte Verrückungen in den Richtungen ihrer Radien erlitten haben. Der Anfangspunkt der Coordinaten sei der Mittelpunkt:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

und ϱ die Grösse der Verrückung, die nur von r abhängig sein soll, positiv gerechnet in der Richtung, in der r wächst. Es ist dann:

$$u = \varrho\frac{x}{r}, \qquad v = \varrho\frac{y}{r}, \qquad w = \varrho\frac{z}{r},$$

also:
$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = \varrho\,dr,$$

woraus folgt, dass u, v, w die partiellen Differentialquotienten nach x, y, z einer Function von r sind. Es werde diese U genannt; damit ist:

$$\sigma = \Delta U = \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dU}{dr}$$

oder:
$$\sigma = \frac{d\varrho}{dr} + 2\frac{\varrho}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{d(r^2\varrho)}{dr}.$$

---

1) Boltzmann, Wien. Ber. **82.** p. 826. u. **82.** p. 1157. 1880.

2) Korteweg, Wied. Ann. **9.** p. 48. 1880.

Die Kräfte X, Y, Z sollen den Gleichungen genügen:

$$X = R\frac{x}{r}, \qquad Y = R\frac{y}{r}, \qquad Z = R\frac{z}{r},$$

wo R eine Function von r ist; da dann:

$$Xdx + Ydy + Zdz = Rdr,$$

so sind auch X, Y, Z die partiellen Differentialquotienten nach x, y, z eine Function von r; nennt man diese P, führt P und U in die Differentialgleichungen für u, v, w ein, multiplicirt dieselben mit dx, dy, dz, addirt und integrirt, so erhält man:

$$-\frac{1}{K}P = \Delta U + (1 + 2\Theta)\sigma \text{ d. h. } = 2(1 + \Theta)\sigma,$$

oder:

$$\sigma = -\frac{1}{2K(1+\Theta)}\left(a + \int_{r_1}^{r} Rdr\right),$$

wo r_1 den Radius der inneren Oberfläche des Glaskörpers, a eine willkürliche Constante bezeichnen soll. Daraus folgt dann weiter:

$$\varrho = -\frac{1}{2K(1+\Theta)}\left(\frac{a}{3}r + \frac{b}{r^2} + \frac{1}{r^2}\int_{r_1}^{r} r^2 dr \int_{r_1}^{r} Rdr\right),$$

wo b eine zweite Constante ist.

Betrachtet man Punkte, für die $y = 0$, $z = 0$ und x positiv ist, so ist für diese $x = r$, $u = \varrho$, $X_r = R_r$; daraus folgt:

$$R_r = -2K\left(\frac{d\varrho}{dr} + \Theta\sigma\right) \text{ oder } = 2K\left(2\frac{\varrho}{r} - (1 + \Theta)\sigma\right),$$

und daher:

$$R_r = \frac{1 + 3\Theta}{3(1 + \Theta)}a - \frac{2}{1 + \Theta}\frac{b}{r^3} + \int_{r_1}^{r} Rdr - \frac{2}{1 + \Theta}\frac{1}{r^3}\int_{r_1}^{r} r^2 dr \int_{r_1}^{r} Rdr.$$

Bezeichnet r_2 den Radius der äusseren Oberfläche des Glases, ist:

$$\text{für } r = r_1 \quad R_r = \overline{R_1}$$
$$\text{für } r = r_2 \quad R_r = -\overline{R_2}$$

und sind $\overline{R_1}$ und $\overline{R_2}$ gegeben, so hat man in dieser Gleichung $r = r_1$ und $r = r_2$ zu setzen, um die Gleichungen zu finden, aus denen a und b zu bestimmen sind.

Nun sei der Glaskörper mit zwei leitenden Belegungen versehen, die man sich als von ihm durch unendlich dünne Luftschichten getrennt vorstellen möge. In der inneren Belegung sei das Potential $= \varphi_0$, in der äusseren $= 0$; im Glase ist dann:

$$\varphi = \varphi_0 \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}.$$

Nach dem im § 2 für A aufgestellten Ausdruck ist ferner:

$$R = \left(\frac{k'}{2} + \frac{k''}{4}\right) \frac{d}{dr} \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2,$$

also, wenn man:

$$c = \frac{\varphi_0}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

setzt:

$$R = -(2k' + k'') \frac{c^2}{r^5}.$$

Wären die Glasflächen von den Belegungen insofern frei, als Druckkräfte, die auf diese ausgeübt werden, sich auf jene nicht übertrügen, so wäre nach dem für $\overline{A}$ aufgestellten Ausdruck:

$$\overline{R}_1 = -\left(2\pi k^2 + \frac{k - k' - k''}{2}\right) \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 \text{ für } r = r_1$$

und:

$$\overline{R}_2 = \left(2\pi k^2 + \frac{k - k' - k''}{2}\right) \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 \text{ für } r = r_2.$$

Nun soll aber angenommen werden, dass im Gegentheil Drucke, die auf die Belegungen wirken, sich ohne Aenderung auf die Glasflächen übertragen; die Werthe von $\overline{R}_1$ und $\overline{R}_2$ sind dann um gewisse Glieder zu vergrössern.

Die innere Fläche der inneren Belegungen enthält keine Electricität; die electrische Dichtigkeit der äusseren Fläche derselben Belegung ist:

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{d\varphi'}{dr},$$

wenn das Zeichen φ' sich auf die Luftschicht bezieht, die die Belegung von dem Glase trennt; die Kraft, die auf die Ein-

heit der Electricitätsmenge in einem Flächenelemente in der Richtung von r wirkt und herrührt von aller vorhandenen Electricität, mit Ausnahme derjenigen, die auf dem Flächenelemente sich befindet, ist:

$$-\tfrac{1}{2}\frac{d\varphi'}{dr}.$$

Hiernach ist der Werth von $\overline{R_1}$ zu vergrössern, um:

$$\frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\varphi'}{dr}\right)^2 \text{ d. h. um } \frac{(1+4\pi k)^2}{8\pi}\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2.$$

Die Dichtigkeit der Electricität in der äusseren Fläche der äusseren Belegung ist $=0$, in der inneren Fläche derselben:

$$=\frac{1}{4\pi}\frac{d\varphi'}{dr};$$

daher ist dem Werthe von $\overline{R_2}$ hinzuzufügen:

$$-\frac{(1+4\pi k)^2}{8\pi}\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2.$$

Setzt man noch für $d\varphi/dr$ seine Werthe, so ergibt sich daher:

$$\overline{R_1}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi}+k+k'+k''\right)\frac{c^2}{r_1^4},$$

$$\overline{R_2}=-\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi}+k+k'+k''\right)\frac{c^2}{r_2^4}.$$

Es können jetzt die Constanten a und b berechnet werden. Um diese Berechnung zu erleichtern, möge die Annahme gemacht werden, dass die Dicke der Glaswand, r_2-r_1, unendlich klein gegen die Radien r_1 und r_2 ist. Es ergibt sich dann:

$$\frac{2(1+3\Theta)}{1+\Theta}r_1^4 a=-\left(\frac{1}{4\pi}+k-3k'-k''\right)c^2,$$

$$\frac{3}{1+\Theta}r_1 b=-\left(\frac{1}{4\pi}+k+\frac{k''}{2}\right)c^2.$$

Von besonderem Interesse ist die Kenntniss der Vergrösserung, welche der Radius r_1 erfahren hat. Wird diese ϱ_1 genannt, so ist:

$$\varrho_1 = -\frac{1}{2K(1+\Theta)}\left(\frac{a}{3}r_1 + \frac{b}{r_1^2}\right).$$

Führt man statt der Grösse K den Elasticitätscoëfficienten des Glases E durch die Gleichung:

$$E = 2K\frac{1+3\Theta}{1+2\Theta}$$

ein, so findet man hiernach:

$$\varrho_1 = \frac{1}{2E}\frac{c_1^2}{r_1^3}\left(\frac{1}{4\pi} + k - \frac{k' - k''\Theta}{1+2\Theta}\right).$$

Diese Gleichung stimmt überein mit einer, die Hr. Korteweg in der oben citirten Arbeit durch Betrachtungen abgeleitet hat, die den hier durchgeführten im wesentlichen ähnlich, wenn auch in ein anderes Gewand gekleidet und von geringerer Allgemeinheit sind. Statt der Grössen k, k', k'', die hier vorkommen, hat er drei andere k, x_1, x_2 eingeführt, die mit diesen in den Relationen stehen:

$$\mathrm{k} = 1 + 4\pi k, \qquad x_1 = 4\pi(k' + k''), \qquad x_2 = 4\pi k'.$$

---

8. Ueber einige Anwendungen der Theorie der Formänderung, welche ein Körper erfährt, wenn er magnetisch oder diëlectrisch polarisirt wird.

Von G. Kirchhoff.

Sitzber. d. k. Acad. der Wissensch. zu Berlin vom 11. December 1884, p. 1155. Wied. Ann. Bd. 25 p. 601, 1885.

Ich erlaube mir der Academie einige Anwendungen der Theorie der Formänderung vorzulegen, welche ein Körper erfährt, wenn er magnetisch oder diëlectrisch polarisirt wird. Ich will anknüpfen an die Darstellung dieser Theorie, die ich in den Sitzungsberichten vom 28. Februar 1884 (der hier unmittelbar vorhergehenden Abhandlung) gegeben habe, und die dort gebrauchten Bezeichnungen benutzen. Der betrachtete Körper ist dort als ein fester elastischer vorausgesetzt; man braucht in den dort abgeleiteten Formeln aber nur die mit k'' bezeichnete Constante $= 0$ zu setzen, um sie auf den Fall anwendbar zu machen, dass der Körper eine Flüssigkeit, eine tropfbare oder gasförmige, ist, wodurch man diejenigen Formeln erhält, die für diesen Fall Hr. v. Helmholtz in einer Mittheilung an die Academie am 17. Februar 1881 abgeleitet hat, und die wiederum in die früher schon von Sir W. Thomson und Cl. Maxwell aufgestellten übergehen, wenn die Constante $k' = 0$ gesetzt wird, was erlaubt ist, wenn die Flüssigkeit als incompressibel betrachtet werden darf, da dann ihre Gleichgewichtsfigur von dem Werthe von k' unabhängig ist. Auf diesen einfachsten Fall kommen die Versuche zurück, deren Beschreibung Hr. Quincke am 5. April 1883 und am 17. Januar 1884 der Academie vorgelegt und durch die er die Diëlectricitätsconstante und die von ihm sogenannte Diamagnetisirungsconstante für eine grosse Zahl von Flüssigkeiten bestimmt hat. Es sollen die nächsten Betrachtungen sich auf eine Anordnung beziehen, wie sie bei diesen Quincke'schen Versuchen stattfand.

1. Man denke sich ein magnetisches Feld, das durch einen electrischen Strom hervorgerufen ist, der nach Willkür

erzeugt und unterbrochen werden kann. Bei den Quincke'schen Versuchen war dasselbe mit Hülfe eines kräftigen Electromagneten hergestellt, dessen ebene Polflächen in einem Abstande von einigen Millimetern von einander sich befanden. In dem grössten Theile des Raumes zwischen den Polflächen war die magnetische Kraft nahezu constant, in der Nähe ihrer Ränder nahm sie schnell ab und war nahezu $= 0$ in mässiger Entfernung von diesen Rändern ausserhalb jenes Raumes. In einem solchen magnetischen Felde seien verschiedene Körper, die einander berühren, theils feste, theils flüssige, vorhanden; die festen sollen als starr, die flüssigen als incompressibel angesehen werden, sowohl wenn sie tropfbar, als wenn sie gasförmig sind; die Aenderungen der Dichtigkeit sollen also vernachlässigt werden, ausser insofern, als sie Aenderungen des Druckes bedingen. Es handelt sich darum, die Bedingungen für das Gleichgewicht der Flüssigkeiten zu bilden; als wirksam sollen dabei neben den magnetischen Kräften die Schwere und die Capillarkräfte angenommen werden. Der Index 1 beziehe sich auf eine der Flüssigkeiten, p_1 sei der Druck in einem Punkte derselben, der Druck, der abhängig ist von der in unendlich kleinen Grenzen variirenden Dichtigkeit, φ_1 das magnetische Gesammtpotential, μ_1 die Dichtigkeit, g die Intensität der Schwere, und die Richtung der x-Axe sei die der Schwere. Aus dem S. 148 meiner citirten Abhandlung (hier p. 103) für die Kraft A aufgestellten Ausdrucke folgt dann:

$$(1) \qquad p_1 = \mu_1 g x + \frac{k_1'}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2\right) + c_1,$$

wo c_1 eine Constante bezeichnet. Eine ähnliche Gleichung gilt für jede der vorhandenen Flüssigkeiten.

Für die Berührungsfläche zweier Flüssigkeiten, 1 und 2, hat die Differenz $p_1 - p_2$ einen von Null verschiedenen Werth. Derselbe rührt zum Theil von den Capillarkräften, zum Theil von den magnetischen her. Es seien r' und r'' die Hauptkrümmungsradien eines Elementes der Berührungsfläche, positiv gerechnet, wenn die Oberfläche der Flüssigkeit 1 eine convexe ist, n die nach dem Innern der ersten Flüssigkeit gerichtete Normale des Elementes, H eine von der Natur der beiden Flüssigkeiten abhängige Constante; dann ist:

$$(2)\begin{cases} p_1 - p_2 = \frac{H}{2}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right) + \left(\frac{1}{4\pi} + k_1\right)\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right)^2 - \left(\frac{1}{4\pi} + k_2\right)\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\right)^2 \\ \qquad - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi} + k_1 - k_1'\right)\left(\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2\right) \\ \qquad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi} + k_2 - k_2'\right)\left(\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right)^2\right). \end{cases}$$

Man findet diese Gleichung aus den a. a. O. S. 147 (hier p. 103) für A_x, A_y, .. aufgestellten Ausdrücken, wenn man eine der Coordinatenaxen mit der Normale n zusammenfallen lässt und benutzt, dass für die Berührungsfläche:

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

$$(3) \qquad \left(\frac{1}{4\pi} + k_1\right)\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \left(\frac{1}{4\pi} + k_2\right)\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$$

ist. Substituirt man in die Gleichung (2) für p_1 den in (1) angegebenen Ausdruck, für p_2 den entsprechenden und eliminirt mit Hülfe von (3) φ_2, so erhält man:

$$(4)\begin{cases} c_1 - c_2 = (\mu_2 - \mu_1) g x + \frac{H}{2}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right) \\ - \frac{2\pi (k_2 - k_1)^2}{1 + 4\pi k_2}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right)^2 + \frac{k_2 - k_1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2\right). \end{cases}$$

Stossen drei verschiedene Körper in einer Linie zusammen, so wirken auf die Theile dieser Linie noch besondere, von der Capillarität herrührende Kräfte, welche miteinander im Gleichgewicht sein müssen. Fällt die Grenzlinie der Berührungsfläche zweier Flüssigkeiten in die Oberfläche eines festen Körpers, die hier keine scharfe Kante darbietet, so ist die Bedingung für dieses Gleichgewicht die, dass die Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten die Oberfläche des festen Körpers unter einem bestimmten Winkel schneidet. Dieser Winkel muss derselbe sein, mögen magnetische Kräfte wirken oder nicht wirken.

2. Es kann der Fall stattfinden, dass das Gleichgewicht beim Eintritt der magnetischen Kräfte dadurch erhalten wird, dass man den Druck in geeigneter Weise verändert, ohne dass irgendwo die geometrischen Verhältnisse geändert werden. Sind nur zwei Flüssigkeiten, 1 und 2, vorhanden und sind

δc_1 und δc_2 die Vergrösserungen, welche die Constanten c_1 und c_2 erfahren, wenn die magnetischen Kräfte in Wirksamkeit treten und das Gleichgewicht erhalten wird, so muss nach (4) für die Berührungsfläche:

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{c} \delta c_1 - \delta c_2 = \\ -\frac{2\pi(k_2-k_1)^2}{1+4\pi k_2}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right)^2 + \frac{k_2-k_1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2\right) \end{array} \right.$$

sein.

Es werde nun angenommen, dass k_1 und k_2 als unendlich klein betrachtet werden dürfen. Diese Voraussetzung ist bei den von Hrn. Quincke untersuchten Flüssigkeiten erfüllt. Diejenige von ihnen, bei der k seinen grössten Werth hatte, war eine wässrige Lösung von Eisenchlorid von der Dichtigkeit 1.51, und für diese fand er[1]):

$$k = 65.10^{-6},$$

wenn für atmosphärische Luft diese Grösse = Null gesetzt wird. Ausser den beiden Flüssigkeiten 1 und 2 mögen in dem magnetischen Felde noch feste polarisirbare Körper vorhanden sein, für welche die Constante k ebenfalls unendlich kleine Werthe besitzt. Die Gleichung (5) vereinfacht sich zunächst dadurch, dass das erste Glied ihrer rechten Seite gegen das zweite vernachlässigt werden kann.

Ferner darf für φ_1 der Werth gesetzt werden, den das Potential haben würde, wenn überall in dem magnetischen Felde $k = 0$ wäre, oder wenn (was gleichbedeutend hiermit sein soll) atmosphärische Luft das ganze magnetische Feld erfüllte. Bezeichnet man durch φ diesen Werth, so wird die genannte Gleichung also:

$$\delta c_1 - \delta c_2 = \frac{k_2-k_1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right).$$

Damit diese, für die Berührungsfläche von 1 und 2 geltende

1) Hr. Quincke hat aus seinen Messungen eine Grösse berechnet, die er $\mathfrak{k}$ genannt hat und die mit dem hier eingeführten k in der Relation steht:

$$k = \mathfrak{k} \,.\, 2g.$$

Bedingung erfüllt werden kann, muss die magnetische Kraft für diese Fläche eine constante Grösse haben.

Die Flüssigkeit 1 sowohl, als die Flüssigkeit 2 soll bis zu Orten reichen, in denen die magnetischen Kräfte, wenn sie erregt sind, eine verschwindend kleine Intensität besitzen; der Gleichung (1) zufolge sind dann δc_1 und δc_2 die Vergrösserungen, die der Druck hier erfährt, wenn die magnetischen Kräfte in Thätigkeit gesetzt werden und das Gleichgewicht erhalten wird. Endlich möge die Anordnung getroffen sein, dass die Druckänderung $\delta c_2 = 0$ ist; die Druckvermehrung δc_1 ist dann:

$$(6) \qquad = \frac{k_2 - k_1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right).$$

Nach dieser Formel hat Hr. Quincke seine Versuche berechnet. Die Voraussetzungen, die derselben zu Grunde liegen, waren bei ihnen in zwei verschiedenen Weisen verwirklicht. Bei der einen Methode diente eine gläserne, U-förmige Röhre, die mit der zu untersuchenden Flüssigkeit theilweise gefüllt war, und deren einer Schenkel zwischen den Polflächen des Electromagneten, deren anderer ausserhalb derselben sich befand. Die zu untersuchende Flüssigkeit ist hier als die Flüssigkeit 1, die atmosphärische Luft als die Flüssigkeit 2 zu rechnen. Bei der anderen Methode erfüllte die zu untersuchende Flüssigkeit den grössten Theil des Raumes zwischen den horizontal gestellten Polflächen, während den Rest eine flache Luftblase einnahm, die beide Polflächen berührte und mit einem aussen befindlichen Manometer communicirte. Hier ist die zu untersuchende Flüssigkeit die Flüssigkeit 2 und die atmosphärische Luft die Flüssigkeit 1.

3. Die hier angestellten theoretischen Betrachtungen gelten auch, wenn statt der magnetischen Kräfte electrische thätig sind, und Hr. Quincke hat auch die Dielectricitäts-Constanten verschiedener isolirender Flüssigkeiten durch Versuche bestimmt, die den zuletzt erwähnten magnetischen Versuchen ganz ähnlich sind. Zwischen zwei horizontale Condensatorplatten, die in einem, mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllten Gefässe aufgestellt waren, hatte er eine flache Luftblase ge-

bracht, die beide Platten berührte und durch eine, in der oberen mündende Röhre mit einem Manometer communicirte, das ausserhalb des Gefässes sich befand. Wurde der Condensator geladen, so zeigte das Manometer eine Vermehrung des Druckes an. Auch für diese gilt der Ausdruck (6), obwohl hier die Grössen k_1 und k_2 nicht als unendlich klein zu betrachten sind, wenn nur die Dicke der Luftblase (also der Abstand der Condensatorplatten) unendlich klein ist gegen ihre horizontalen Dimensionen.

Es seien $x = 0$ und $x = \alpha$ die Gleichungen der inneren Oberflächen der beiden Condensatorplatten, $\varphi = 0$ und $\varphi = P$ die Werthe des Potentials in diesen, wenn sie geladen sind. Alle in Betracht kommenden Grenzflächen heterogener Körper sollen Rotationsflächen sein, deren gemeinsame Axe die x-Axe ist. Welche Function φ von x, y, z in der Nähe des Randes der Luftblase ist, lässt sich mit den jetzigen Hülfsmitteln der Analysis allgemein nicht finden, aber man weiss Folgendes: Es ist φ überall eine Function von x und $\sqrt{y^2 + z^2}$; für $x = 0$ und $x = \alpha$ verschwinden an den Oberflächen der Condensatorplatten $\partial\varphi/\partial y$ und $\partial\varphi/\partial z$, und in einer Entfernung vom Rande der Blase, die gross genug gegen α ist, ist sowohl in ihr, als in der umgebenden Flüssigkeit:

$$(7) \qquad \varphi = P\frac{x}{\alpha}.$$

Nun fasse man einen unendlich kleinen Raum ins Auge, der begrenzt ist

durch die Ebenen $x = 0$ und $x = \alpha$,

einen Theil der xy-Ebene, in dem y positiv ist,

eine Ebene, die durch die x-Axe gelegt ist, mit der xy-Ebene den unendlich kleinen Winkel ϑ bildet und zwischen den positiven Theilen der y-Axe und der z-Axe sich befindet,

und endlich zwei Cylinderflächen, die um die x-Axe mit den Radien β_1 und β_2 beschrieben sind.

Diese Radien sollen so gewählt sein, dass die erste Cylinderfläche in der Luft, die zweite in der äusseren Flüssigkeit in der Region sich befindet, in der der in (7) für φ angegebene Ausdruck gilt. Es muss dann $\beta_2 - \beta_1$ unendlich gross gegen

α sein; dabei soll aber diese Differenz noch unendlich klein gegen die Werthe sein, die β_1 und β_2 selbst besitzen.

Es soll ausgedrückt werden, dass die Summe der y-Componenten der Kräfte verschwindet, welche auf die in dem bezeichneten Raume vorhandene Masse ausgeübt werden. Dabei sollen die electrischen Kräfte, welche hier wirksam sind, ersetzt werden durch die auf die Oberfläche wirkenden Druckkräfte, durch die sie ersetzt werden können, und deren Componenten durch A_x, B_x, ... bezeichnet werden mögen.

Für die Ebenen $x = 0$ und $x = \alpha$ ist $\partial\varphi/\partial y = 0$, und, da allgemein

$$B_x = -\left(\frac{1}{4\pi} + k\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

ist, so tragen die Theile dieser Ebenen, welche zur Oberfläche des gedachten Raumes gehören, zu der gesuchten Summe nichts bei.

Was zu dieser Summe die Cylinderflächen, deren Radien β_1 und β_2 genannt sind, hinzubringen, ist, wenn man nur die Grössen der höchsten Ordnung berücksichtigt, den Index 1 auf die Luft und den Index 2 auf die umgebende Flüssigkeit bezieht:

$$(8) \qquad = \alpha\beta_1\vartheta\,\frac{k_1 - k_2 - k_1' + k_2'}{2}\,\frac{P^2}{\alpha^2}.$$

Der Theil der xy-Ebene, der zur Begrenzung des gedachten Raumes gehört, trägt auch nichts zu der zu bildenden Summe bei, da allgemein:

$$B_z = -\left(\frac{1}{4\pi} + k\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

und hier $\partial\varphi/\partial z = 0$ ist.

Die letzte Begrenzungsfläche des betreffenden Raumes hat die Grösse:

$$\alpha(\beta_2 - \beta_1)$$

und die y-Componente des auf die Einheit ihrer Fläche bezogenen Druckes ist:

$$= C_z\vartheta,$$

wo C_z unter der Annahme $z = 0$ zu berechnen ist. Dieses C_z ist von der Ordnung von P^2/α^2 und daher ist auch der

Beitrag, den diese Fläche zu der in Rede stehenden Summe liefert, unendlich klein gegen das in (8) angegebene Glied.

Daher ist die Gleichgewichtsbedingung, welche gebildet werden sollte:

$$0 = \alpha \beta_1 \vartheta \frac{k_1 - k_2 - k_1' + k_2''}{2} \frac{P^2}{\alpha^2} + \beta_1 \vartheta \int_0^\alpha (p_1 - p_2)\, dx.$$

Drückt man hier p_1 und p_2 mit Hülfe von (1) aus, zieht von der dann entstehenden Gleichung diejenige ab, in die sie sich verwandelt, wenn man annimmt, dass die electrischen Kräfte ausser Thätigkeit gesetzt sind, gibt den Zeichen δc_1 und δc_2 die entsprechende Bedeutung, wie bei der Discussion der magnetischen Versuche des Hrn. Quincke, und setzt auch hier $\delta c_2 = 0$, so erhält man für δc_1:

$$\frac{k_2 - k_1}{2} \frac{P^2}{\alpha^2},$$

einen Ausdruck, für den auch der Ausdruck (6) geschrieben werden kann.

4. Hr. Quincke brachte zwischen seine, durch eine isolirende Flüssigkeit getrennte Condensatorplatten eine Luftblase, die nur die obere Platte berührte; wurde der Condensator geladen, so verlängerte sich die Blase in der Richtung der Kraftlinien und zog sich zusammen in den auf diesen senkrechten Richtungen. Zwischen den Polflächen seines Electromagneten zeigte unter entsprechenden Verhältnissen eine Luftblase diese Erscheinung nicht, und auch ein hängender Tropfen verschiedener magnetischer Flüssigkeiten erlitt keine Formänderung, wenn der Magnetismus erregt wurde. Eine Anordnung, die ähnlich der eben erwähnten ist und keine Schwierigkeit der Rechnung darbietet, soll hier theoretisch verfolgt werden.

Der Raum, soweit er in Betracht kommt, sei von zwei Flüssigkeiten, 1 und 2, erfüllt, die, wenn die electrischen oder magnetischen Kräfte nicht wirken, durch eine Kugelfläche vom Radius R getrennt sind. Damit das der Fall sein kann, muss die Schwere unwirksam sein. Sind die electrischen oder magnetischen Kräfte erregt, so sollen sie ein Potential erzeugen,

das in der äusseren Flüssigkeit, der Flüssigkeit 2, in grosser Entfernung von der Flüssigkeit 1 der Gleichung:

$$\varphi_2 = -a_2 x \tag{9}$$

genügt, wo a_2 eine Constante ist. Es soll die Gestalt bestimmt werden, die dabei die Grenzfläche der beiden Flüssigkeiten annimmt. Für dieselbe ergibt sich aus der Gleichung (4) die Bedingung

$$\left\{\begin{aligned} \delta c_1 = \frac{H}{2}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} - \frac{2}{R}\right) - \frac{2\pi(k_2-k_1)^2}{1+4\pi k_2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right)^2 \\ + \frac{k_2-k_1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2\right). \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Es hat die Flüssigkeit 1 einen Mittelpunkt; in diesen lege man den Anfangspunkt der Coordinaten. Die gesuchte Fläche ist dann eine Rotationsfläche, deren Axe die x-Axe ist, und für ihren Schnitt mit der xy-Ebene ist daher:

$$\pm\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right) = \frac{1}{y}\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} + \frac{1}{dy}\, d\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Setzt man:

$$x = \varrho\cos\vartheta \qquad y = \varrho\sin\vartheta,$$

nimmt ϑ als unabhängige Variable an und macht:

$$\frac{d\varrho}{d\vartheta} = \varrho' \qquad \frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2} = \varrho'',$$

so wird diese Gleichung:

$$\pm\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right) = \frac{\varrho'\cos\vartheta - \varrho\sin\vartheta}{\varrho\sin\vartheta\sqrt{\varrho'^2+\varrho^2}} + \frac{\varrho''\varrho - 2\varrho'^2 - \varrho^2}{(\varrho'^2+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Man setze ferner:

$$\varrho = R(1+u)$$

und nehme u als unendlich klein an. Man erhält dann, indem man die Zweideutigkeit des Vorzeichens durch die Erwägung hebt, dass, wenn u verschwindet, $r' = r'' = R$ wird:

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} - \frac{2}{R} = -\frac{1}{R}\left(\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + \operatorname{cotg}\vartheta\frac{du}{d\vartheta} + 2u\right) \qquad \text{oder:}$$

$$= -\frac{1}{R}\left((1-\mu^2)\frac{d^2u}{d\mu^2} - 2\mu\frac{du}{d\mu} + 2u\right), \tag{11}$$

wenn:

$$\mu = \cos\vartheta.$$

Die Functionen φ_1 und φ_2 sind aus der Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$, der sie genügen müssen, der Bedingung (9) und den Bedingungen (3) zu bestimmen. Die letzten sind, da u als unendlich klein angenommen ist, zu erfüllen für $\varrho = R$. Daraus folgt:

$$\varphi_1 = -a_1 \varrho \mu$$
$$\varphi_2 = -\left(a_2 \varrho + \frac{b_2 R^3}{\varrho^2}\right)\mu,$$

wo:

$$a_1 = \frac{3(1 + 4\pi k_2)}{3 + 4\pi(k_1 + 2k_2)} a_2$$
$$b_2 = \frac{4\pi(k_2 - k_1)}{3 + 4\pi(k_1 + 2k_2)} a_2,$$

und:

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right)^2 = a_1{}^2\mu^2, \quad \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2 = a_1{}^2.$$

Substituirt man diese Werthe, sowie den Ausdruck (11) in die Gleichung (16), so erhält man:

$$(1-\mu^2)\frac{d^2u}{d\mu^2} - 2\mu\frac{du}{d\mu} + 2u = A - B\mu^2,$$

wo:

$$A = -\frac{2R}{H}\left(\delta c_1 + \frac{k_1 - k_2}{2} a_1{}^2\right)$$
$$B = \quad \frac{R}{H}\frac{4\pi(k_1 - k_2)^2}{1 + 4\pi k_2} a_1{}^2.$$

Wären A und $B = 0$, so wäre diese Gleichung die Differentialgleichung für die Kugelfunctionen erster Ordnung von einem Argument. Ein particuläres Integral der gefundenen Gleichung ist:

$$u = \frac{A}{2} - \frac{B}{4}(1 - \mu^2);$$

das allgemeine erhält man, wenn man die Ausdrücke:

$$\mu \text{ und } \tfrac{1}{2}\mu \lg\frac{1+\mu}{1-\mu} - 1,$$

mit willkürlichen Constanten multiplicirt, hinzufügt. Diese Constanten sind hier aber gleich Null zu setzen, da u für $\mu = +1$ und $\mu = -1$ endlich bleiben und denselben Werth

annehmen muss; denselben Werth, da der Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt der Flüssigkeit 1 gelegt ist. Die Annahme, dass dieselbe incompressibel sei, gibt eine Relation zwischen den Constanten A und B; in der That folgt aus ihr:

$$\int_{-1}^{+1} u\,d\mu = 0\,, \text{ d. h. } A = \tfrac{1}{3} B\,,$$

sodass sich ergibt:

$$u = \frac{B}{4}(\mu^2 - \tfrac{1}{3})\,.$$

Hiernach erleidet die Flüssigkeit 1 in der Richtung der Kraftlinien eine Dilatation, die:

$$= \frac{B}{6} \text{ d. h. } = \frac{R}{3H} \frac{2\pi(k_1 - k_2)^2}{1 + 4\pi k_2} a_1{}^2\,,$$

in jeder darauf senkrechten Richtung eine Contraction, die halb so gross ist. Die Dilatationen und Contractionen, die stattfinden, sind mit dem Quadrate der Differenz $k_1 - k_2$ proportional; darauf beruht es, dass sie im electrischen Felde, wo diese Differenz einen erheblichen Werth hat, sich zeigen, während sie im magnetischen Felde, wo dieselbe ungemein klein ist, sich der Beobachtung entziehen.

5. Es soll schliesslich die Formänderung berechnet werden, die eine Kugel von Eisen erfährt, wenn sie durch eine constante magnetische Kraft magnetisirt wird.

Diesem Falle entspricht es, dass in grosser Entfernung von der Kugel

$$\varphi = -Jx$$

ist; J ist dann die Intensität der magnetisirenden Kraft, die Richtung der x-Axe ihre Richtung. Für die umgebende Luft werde $k = 0$ gesetzt und das Zeichen k auf das Eisen bezogen; dann ist im Innern der Kugel

$$\varphi = -\frac{J}{1 + \frac{4\pi}{3}k}x\,.$$

Daraus folgt, dass die in meiner citirten Abhandlung[1]) S. 148 (hier vorhergehende Abhandlung p. 103) mit A, B, C bezeichneten Kräfte verschwinden, und die mit $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ bezeichneten Druckkräfte, wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt der Kugel legt und ihren Radius mit R bezeichnet, diese Werthe annehmen:

$$(12)\quad \begin{cases} \overline{A} = \dfrac{J^2}{\left(1+\dfrac{4\pi}{3}k\right)^2 R^3}\left(2\pi k^3 x^3 + \dfrac{k-k'-k''}{2} R^2 x\right) \\ \overline{B} = \dfrac{J^2}{\left(1+\dfrac{4\pi}{3}k\right)^2 R^3}\left(2\pi k^2 x^2 y + \dfrac{k-k'}{2} R^2 y\right) \\ \overline{C} = \dfrac{J^2}{\left(1+\dfrac{4\pi}{3}k\right)^2 R^3}\left(2\pi k^2 x^2 z + \dfrac{k-k'}{2} R^2 z\right). \end{cases}$$

Nennt man u, v, w die Componenten der Verrückung, welche infolge der Magnetisirung der materielle Punkt der Kugel erfährt, welcher vorher die Coordinaten x, y, z hatte, und setzt:

$$(13)\quad \begin{cases} X_x = -2K\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \Theta\sigma\right) & Y_z = Z_y = -K\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ Y_y = -2K\left(\dfrac{\partial v}{\partial y} + \Theta\sigma\right) & Z_x = X_z = -K\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \\ Z_z = -2K\left(\dfrac{\partial w}{\partial z} + \Theta\sigma\right) & X_y = Y_x = -K\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \sigma = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}, & \end{cases}$$

so hat man infolge davon, dass die Kräfte A, B, C gleich Null sind:

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

und für $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ist:

1) Sitzungsberichte vom 28. Februar 1884.

$$(15)\qquad \begin{cases} R\bar{A} = -(xX_x + yX_y + zX_z) \\ R\bar{B} = -(xY_x + yY_y + zY_z) \\ R\bar{C} = -(xZ_x + yZ_y + zZ_z). \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (12), (13), (14), (15) sind u, v, w zu berechnen. Ihre Ausdrücke lassen sich, wie die in (12) angegebenen Ausdrücke von $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ aus je drei Theilen zusammensetzen, von denen der erste den Factor $2\pi k^2$, der zweite den Factor $\frac{k-k'}{2}$, der dritte den Factor $-\frac{k''}{2}$ enthält; man kann daher setzen:

$$(16)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{J^2}{\left(1+\frac{4\pi}{3}k\right)^2}\left(2\pi k^2 u_1 + \dfrac{k-k'}{2}u_2 - \dfrac{k''}{2}u_3\right) \\ v = \dfrac{J^2}{\left(1+\frac{4\pi}{3}k\right)^2}\left(2\pi k^2 v_1 + \dfrac{k-k'}{2}v_2 - \dfrac{k''}{2}v_3\right) \\ w = \dfrac{J^2}{\left(1+\frac{4\pi}{3}k\right)^2}\left(2\pi k^2 w_1 + \dfrac{k-k'}{2}w_2 - \dfrac{k''}{2}w_3\right). \end{cases}$$

u_1, v_1, w_1 oder u_2, v_2, w_2 oder u_3, v_3, w_3 müssen dann den Gleichungen genügen, die aus den für u, v, w aufgestellten entstehen, wenn man (12) ersetzt durch:

$$(17)\qquad \bar{A} = \frac{x^3}{R^3} \quad \bar{B} = \frac{x^2 y}{R^3} \quad \bar{C} = \frac{x^2 z}{R^3}$$

oder durch:

$$(18)\qquad \bar{A} = \frac{x}{R} \quad \bar{B} = \frac{y}{R} \quad \bar{C} = \frac{z}{R}$$

oder durch:

$$(19)\qquad \bar{A} = \frac{x}{R} \quad \bar{B} = 0 \quad \bar{C} = 0.$$

Den für u_1, v_1, w_1 geltenden Bedingungen kann man durch die Annahme:

$$(20)\qquad \begin{cases} u_1 = a_1 x^3 + b_1 (y^2+z^2)x + c_1 R^2 x \\ v_1 = a_1' x^2 y + b_1'(y^2+z^2)y + c_1' R^2 y \\ w_1 = a_1' x^2 z + b_1'(y^2+z^2)z + c_1' R^2 z \end{cases}$$

genügen, wenn man die sechs Constanten a_1, b_1, c_1, a_1', b_1' c_1'

passend bestimmt. Bei dieser Annahme geben die Gleichungen (13):

$$\sigma = (3a_1 + 2a_1')x^2 + (b_1 + 4b_1')(y^2 + z^2) + (c_1 + 2c_1')R^2$$
$$X_x = -2K(3a_1 x^2 + b_1 (y^2 + z^2) + c_1 R^2 + \Theta\sigma)$$
$$Y_y = -2K(a_1' x^2 + b_1'(3y^2 + z^2) + c_1' R^2 + \Theta\sigma)$$
$$Z_z = -2K(a_1' x^2 + b_1'(y^2 + 3z^2) + c_1' R^2 + \Theta\sigma)$$
$$Y_z = Z_y = -4Kb_1' yz$$
$$Z_x = X_z = -2K(a_1' + b_1)zx$$
$$X_y = Y_x = -2K(a_1' + b_1)xy.$$

Hiernach reduciren sich die Gleichungen (14) auf die beiden Relationen zwischen den eingeführten Constanten:

$$0 = 3a_1 + a_1' + b_1 + \Theta(3a_1 + 2a_1')$$
$$0 = a_1' + b_1 + 8b_1' + 2\Theta(b_2 + 4b_1').$$

Die Gleichungen (15) ergeben bei Rücksicht auf (17), wenn man $x^2 + y^2 + z^2$ für R^2 in den Ausdrücken für X_x, Y_y, Z_z setzt:

$$\frac{1}{2KR^2} = 3a_1 + c_1 + \Theta(3a_1 + 2a_1' + c_1 + 2c_1')$$
$$0 = a_1' + 2b_1 + c_1 + \Theta(b_1 + 4b_1' + c_1 + 2c_1')$$
$$\frac{1}{2KR^2} = 2a_1' + b_1 + c_1' + \Theta(3a_1 + 2a_1' + c_1 + 2c_1')$$
$$0 = 3b_1' + c_1' + \Theta(b_1 + 4b_1' + c_1 + c_1').$$

So hat man sechs Gleichungen für die sechs Unbekannten a_1, b_1, c_1, a_1', b_1', c_1'; ihre Auflösung gibt:

$$(21)\quad \begin{cases} b_1 = (7 + 8\Theta)\dfrac{a_1}{4\Theta}, \quad a_1' = -(7 + 6\Theta)\dfrac{a_1}{4\Theta}, \quad b_1' = -2\Theta\dfrac{a_1}{4\Theta} \\ c_1 = -\dfrac{7 + 31\Theta + 32\Theta^2}{1 + 3\Theta}\dfrac{a_1}{4\Theta}, \quad c_1' = \dfrac{6\Theta + 16\Theta^2}{1 + 3\Theta}\dfrac{a_1}{4\Theta} \end{cases}$$

und:

$$\frac{1}{2KR^2} = -(7 + 19\Theta)\frac{a_1}{4\Theta}.$$

Man kann ferner:

$$(22)\qquad u_2 = a_2 x, \quad v_2 = a_2 y, \quad w_2 = a_2 z$$

setzen, woraus nach (13) folgt:

$$\sigma = 3 a_2$$
$$X_x = Y_y = Z_z = -2K(1+3\Theta)a_2$$
$$Y_z = Z_x = X_y = \quad 0;$$

dabei werden die Gleichungen (14) erfüllt und die Gleichungen (15) geben mit Hülfe von (18):

(23) $$a_2 = \frac{1}{2K(1+3\Theta)}.$$

Endlich mache man:

(24) $$u_3 = a_3 x, \quad v_3 = b_3 y, \quad w_3 = b_3 z;$$

dabei wird:

$$\sigma = a_3 + 2b_3$$
$$X_x = -2K\big(a_3 + \Theta(a_3+2b_3)\big), \quad Y_y = Z_z = -2K\big((b_3 + \Theta(a_3+2b_3)\big)$$
$$Y_z = Z_x = X_y = 0.$$

Auch hier werden die Gleichungen (14) von selbst erfüllt und die Gleichungen (15) geben bei Rücksicht auf (19):

(25) $$a_3 = \frac{1+2\Theta}{2K(1+3\Theta)}, \quad b_3 = -\frac{\Theta}{2K(1+3\Theta)}.$$

Substituirt man in die Gleichungen (16) die in (20), (21), (22), (23), (24), (25) gegebenen Ausdrücke, so hat man die Lösung der vorgelegten Aufgabe.

Um die Werthe der Verrückungen *u, v, w* numerisch berechnen zu können, muss man zunächst die Grösse *k* kennen. Es ist dieselbe in der hier zu Grunde gelegten Theorie als eine Constante vorausgesetzt, man weiss aber, dass sie thatsächlich in hohem Grade veränderlich ist; man schliesst sich, bei beliebiger Gestalt der Eisenkörpers und beliebig gegebenen magnetisirenden Kräften, näher an die Wirklichkeit an, wenn man *k* als eine durch Beobachtungen zu bestimmende Function von:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}$$

annimmt. Bezeichnet man dieses Argument durch $\mathfrak{R}$ und nimmt als Einheit dafür:

$$\frac{\mathrm{gr}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{cm}^{\frac{1}{2}}.\,\mathrm{sec}}$$

an, eine Einheit, die zehnmal so gross ist als die von Gauss für magnetische Kräfte eingeführte, so ergeben die von Hrn. Stoletow[1]) ausgeführten Messungen, dass k von 21,5 bis 174 zunimmt, wenn $\mathfrak{R}$ von 0,43 bis 3,2 wächst, und bis 42,1 sinkt, wenn $\mathfrak{R}$ weiter bis 31 vergrössert wird. Für eine Eisenkugel, die unter dem Einfluss einer constanten magnetisirenden Kraft, J, steht, gelten die unter der Annahme, dass k eine Constante ist, abgeleiteten Formeln auch bei Rücksicht auf die Veränderlichkeit dieser Grösse; nur ist der Werth derselben verschieden zu setzen je nach dem Werthe von J; er ist zu bestimmen aus der Beziehung zwischen k und $\mathfrak{R}$ und der Gleichung:

$$\mathfrak{R} = \frac{J}{1 + \frac{4\pi}{3} k}.$$

Es wäre:

$$k = 21{,}4 \text{ oder } = 175 \text{ oder } = 42{,}1$$
$$\text{für } J = 39{,}1 \text{ oder } = 2340 \text{ oder } = 5450.$$

Ueber die Werthe von k' und k'' hat man gar keine Erfahrung. Setzt man aber voraus, dass sie nicht gross gegen k sind, und nimmt an, dass die Kraft J zwischen dem kleinsten und dem grössten der eben angeführten Werthe liegt, so braucht man bei der Berechnung der für die Verrückungen u, v, w in (16) gegebenen Ausdrücke k' und k'', und auch k, nicht genauer zu kennen; man kann dann k als unendlich gross betrachten und schreiben:

$$(26) \qquad u = \frac{9}{8\pi} J^2 u_1, \quad v = \frac{9}{8\pi} J^2 v_1, \quad w = \frac{9}{8\pi} J^2 w_1.$$

Ist E der Elasticitätscoëfficient des Eisens, so ist:

$$E = 2K \frac{1 + 3\Theta}{1 + 2\Theta},$$

und setzt man mit Poisson:

$$\Theta = \tfrac{1}{2},$$

so geben daher die Gleichungen (21):

1) Pogg. Ann. Bd. 146. S. 461.

$$a_1 = -\frac{5}{33}\frac{1}{ER^2}, \quad b_1 = -\frac{5}{6}\frac{1}{ER^2}, \quad c_1 = \frac{61}{66}\frac{1}{ER^2}$$

$$a_1' = \frac{25}{33}\frac{1}{ER^2}, \quad b_1' = \frac{5}{66}\frac{1}{ER^2}, \quad c_1' = -\frac{7}{33}\frac{1}{ER^2}.$$

Aus (20) und (26) folgt hiernach:

$$u = \frac{3}{176\pi}\frac{J^2}{ER^2}\left(-10x^3 - 55(y^2+z^2)x + 61R^2x\right)$$

$$v = \frac{3}{176\pi}\frac{J^2}{ER^2}\left(50x^2y + 5(y^2+z^2)y - 14R^2y\right)$$

$$w = \frac{3}{176\pi}\frac{J^2}{ER^2}\left(50x^2z + 5(y^2+z^2)z - 14R^2z\right).$$

Für die räumliche Dilatation, σ, ergiebt sich dabei:

$$\sigma = \frac{3}{176\pi}\frac{J^2}{ER^2}\left(70x^2 - 35(y^2+z^2) - 33R^2\right).$$

Ein Radius der Kugel, der die Richtung der magnetisirenden Kraft hat, erleidet die Verlängerung:

$$\frac{153}{176\pi}\frac{J^2}{E}R,$$

ein Radius, der senkrecht zu dieser Kraft ist, die Verkürzung:

$$\frac{27}{176\pi}\frac{J^2}{E}R.$$

Ein magnetisches Feld, wie es hier vorausgesetzt ist, kann mit Hülfe eines electrischen Stromes hervorgebracht werden, der eine Spirale durchfliesst, welche die Eisenkugel umgibt und so lang ist, dass die magnetische Kraft des Stromes in dem Raume, den die Kugel einnimmt, als constant betrachtet werden kann. Ist n die Zahl der Windungen, die auf ein Centimeter in der Richtung der Länge der Spirale kommen, und i die Intensität des Stromes in Ampères ausgedrückt, so ist dann:

$$J = \frac{4\pi}{10} ni \frac{\mathrm{gr}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{cm}^{\frac{1}{2}} . \mathrm{sec}};$$

setzt man für den Elasticitätscoëfficienten des Eisens:

$$E = 1{,}88 . 10^{12} \frac{\mathrm{gr}}{\mathrm{cm} . \mathrm{sec}^2},$$

so ergibt sich die Verlängerung eines Radius der Kugel, der der Axe der Spirale parallel ist:

$$= n^2 i^2 . 2{,}32 . 10^{-13} . R.$$

Schon im Jahre 1847 hat Joule[1]) die Verlängerungen gemessen, die Eisenstäbe erfahren, wenn sie in einer Spirale magnetisirt werden, Verlängerungen, welche im Maximum 1,4 Milliontel der Länge betrugen. Aehnliche Messungen bei einer Kugel auszuführen würde wegen der Kleinheit der Formänderungen kaum möglich sein.

---

9. Zur Theorie der Gleichgewichtsvertheilung der Electricität auf zwei leitenden Kugeln; von G. Kirchhoff.

Sitzber. d. k. Acad. d. Wissensch. zu Berlin vom 12. Nov. 1885, p. 1007.
Wied. Ann. Bd. 27, p. 673, 1886.

Die Gleichgewichtsvertheilung der Electricität auf zwei leitenden Kugeln ist ein Problem, dessen Lösung von Poisson[2]) gegeben und später von anderen auf verschiedenen Wegen abgeleitet ist. Von hervorragendem Interesse bei demselben ist die Ermittelung der Electricitätsmengen, welche die Kugeln enthalten, und der Kraft, mit der sie anziehend oder abstossend aufeinander wirken, wenn die Potentialwerthe in ihnen gegeben sind.

Es seien a und b die Radien der beiden Kugeln, c der Abstand ihrer Mittelpunkte, g, h die Potentialwerthe in ihnen, E_1, E_2 die Electricitätsmengen, die sie enthalten, und F die Abstossungskraft, die sie aufeinander ausüben; dann ist:

$$E_1 = a_{11} g + a_{12} h; \qquad E_2 = a_{21} g + a_{22} h,$$

$$2F = g^2 \frac{\partial a_{11}}{\partial c} + 2gh \frac{\partial a_{12}}{\partial c} + h^2 \frac{\partial a_{22}}{\partial c}, \quad \text{wo } a_{21} = a_{12}$$

1) Phil. Mag. Vol. XXX. p. 76. 225.
2) Poisson, Mém. de l'Institut de France, 12. (1) p. 1; (2) p. 163. 1811.

und a_{11}, a_{12}, a_{22} Functionen von a, b, c sind, um deren Bestimmung es sich handelt.

Aus den Gleichungen, welche ich in meiner Abhandlung: „Ueber die Vertheilung der Electricität auf zwei leitenden Kugeln"[1]) abgeleitet habe, ergeben sich für a_{11}, a_{12}, a_{22} die folgenden Ausdrücke. Es sei q die positive Wurzel, welche kleiner als 1 ist, der Gleichung:

$$q^2 + \frac{1}{q^2} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab},$$

oder, was dasselbe ist, der Gleichung:

$$q + \frac{1}{q} = \sqrt{\frac{c^2 - (a-b)^2}{ab}} \text{ und } \xi = \frac{a + bq^2}{c}, \quad \eta = \frac{b + aq^2}{c},$$

wobei:

$$\eta\xi = q^2,$$

dann ist:

$$a_{11} = a(1 - \xi^2)\left\{\frac{1}{1-\xi^2} + \frac{q^2}{1-\xi^2 q^4} + \frac{q^4}{1-\xi^2 q^8} + \cdots\right\}$$

$$-a_{12} = \frac{ab}{c}(1 - q^4)\left\{\frac{1}{1-q^4} + \frac{q^2}{1-q^8} + \frac{q^4}{1-q^{12}} + \cdots\right\}$$

$$a_{22} = b(1 - \eta^2)\left\{\frac{1}{1-\eta^2} + \frac{q^2}{1-\eta^2 q^4} + \frac{q^4}{1-\eta^2 q^8} + \cdots\right\}$$

Sir Williiam Thomson[2]) hat für a_{11}, a_{12}, a_{22} Formeln aufgestellt, welche zur numerischen Rechnung vorzüglich geeignet sind, wenn der Abstand der Kugeln nicht zu klein gegen ihre Radien ist, und mit Hülfe derselben zum Gebrauch bei einem von ihm construirten Electrometer eine Tafel berechnet, aus der die Werthe von a_{11}, a_{12}, a_{22} und $\partial a_{11}/\partial c$, $\partial a_{12}/\partial c$, $\partial a_{22}/\partial c$ für den Fall $a = b = 1$ zu entnehmen sind, wenn c einen der Werthe 2,1, 2,2, 2,3 ..., 4 hat. Diese Formeln sind:

$$a_{11} = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} + \cdots \qquad -a_{12} = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \cdots$$

$$a_{22} = \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} + \frac{1}{Q_3} + \cdots$$

1) G. Kirchhoff, Crelle's Journ. **59.** p. 89, 1861. Ges. Abh. p. 78.
2) W. Thomson, Phil. Mag. (4) **5.** p. 287. 1853.

$$P_{n+1} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab} P_n - P_{n-1}, \qquad Q_{n+1} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab} Q_n - Q_{n-1},$$

$$S_{n+1} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab} S_n - S_{n-1},$$

und:

$$P_1 = \frac{1}{a} \qquad P_2 = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab} P_1 + \frac{1}{b}$$

$$Q_1 = \frac{1}{b} \qquad Q_2 = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab} Q_1 + \frac{1}{a}$$

$$S_1 = \frac{c}{ab} \qquad S_2 = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab} S_1$$

Statt der drei letzten Gleichungen können auch die einfacheren:

$$P_0 = -\frac{1}{b}, \quad Q_0 = -\frac{1}{a}, \quad S_0 = 0$$

geschrieben werden, wenn man festsetzt, dass die für P_{n+1}, Q_{n+1}, S_{n+1} angegebenen Relationen auch für $n = 1$ gelten sollen.

Hiernach kann man mit Leichtigkeit nacheinander die Glieder der für a_{11}, a_{12}, a_{22} nach Sir W. Thomson angesetzten Entwickelungen berechnen.

Es stimmen diese Glieder einzeln mit denen der vorher angegebenen Reihen überein. Um diese Behauptung in Bezug auf die für a_{11} aufgestellten Reihen einzusehen, bemerke man, dass die für P_n geltende Differenzengleichung durch Einführung der Grösse q wird:

$$P_{n+1} = \left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) P_n - P_{n-1},$$

und dass hiernach ist:

$$P_n = A q^{2n} + B \frac{1}{q^{2n}},$$

wo A und B constante, d. h. von n unabhängige Grössen sind. Dieselben bestimmen sich, indem man einmal $n = 0$, dann $n = 1$ setzt. Das gibt:

$$A + B = -\frac{1}{b}; \quad A q^2 + B \frac{1}{q^2} = \frac{1}{a},$$

also:

$$A\left(q^2 - \frac{1}{q^2}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b q^2}; \quad B\left(\frac{1}{q^2} - q^2\right) = \frac{1}{a} + \frac{q^2}{b}.$$

Aus den Relationen:

$$\xi = \frac{a + bq^2}{c}, \qquad \frac{1}{\xi} = \frac{a + \frac{b}{q^2}}{c}$$

folgt aber:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} \frac{\frac{\xi^2}{q^2} - q^2}{1 - \xi^2},$$

daher wird:

$$A = -\frac{1}{a} \frac{\xi^2}{(1 - \xi^2) q^2}, \qquad B = \frac{1}{a} \frac{q^2}{1 - \xi^2}$$

und:

$$P_n = \frac{1}{a(1 - \xi^2)} \left(\frac{1}{q^{2(n-1)}} - \xi^2 q^{2(n-1)} \right),$$

oder:

$$\frac{1}{P_n} = a(1 - \xi^2) \frac{q^{2(n-1)}}{1 - \xi^2 q^{4(n-1)}}.$$

Das ist aber das n. Glied der zuerst für a_{11} angegebenen Reihenentwickelung. Ganz ähnliche Rechnungen lassen sich in Bezug auf a_{12} und a_{22} durchführen.

Diese Reihen convergiren um so schneller, je kleiner q, d. h. je grösser der Abstand der Kugeln im Verhältniss zu ihren Radien ist. Um ein Urtheil über diese Convergenz in einigen Fällen hervorzurufen, lasse ich die ersten Glieder der Entwickelung von a_{11} für gleiche Kugeln und einige Werthe der Entfernung folgen, die in der Tabelle von Sir W. Thomson vorkommen.

$a = b = 1$

c	2,1	1,5	4
$1/P_1$	1	1	1
$1/P_2$	0,2932	0,1904	0,0667
$1/P_3$	0,1386	0,0469	0,0048
$1/P_4$	0,0715	0,0117	0,0004
$1/P_5$	0,0377	0,0029.	

Man sieht hieraus, dass bei den kleineren der von Sir W. Thomson in seine Tafel aufgenommenen Entfernungen schon die Berücksichtigung einer bedeutenden Zahl von Gliedern nöthig ist, um eine mässige Genauigkeit zu erreichen. Es lassen sich die in Rede stehenden Reihen in andere verwandeln, deren Convergenz eine ungleich schnellere ist.

Diese Reihen sind, abgesehen von gewissen Factoren, alle von der Form:

$$\frac{1}{1-\alpha}+\frac{\beta}{1-\alpha\gamma}+\frac{\beta^2}{1-\alpha\gamma^2}+\frac{\beta^3}{1-\alpha\gamma^3}+\cdots,$$

wo α, β, γ echte Brüche bedeuten. Bezeichnet man diese Reihe mit R, so hat man auch:

$$R=\frac{1}{1-\alpha}+\beta+\beta^2+\beta^3+\cdots+\frac{\alpha\beta\gamma}{1-\alpha\gamma}+\frac{\alpha\beta^2\gamma^2}{1-\alpha\gamma^2}+\frac{\alpha\beta^3\gamma^3}{1-\alpha\gamma^3}+\cdots$$

oder, wenn man die ersten Glieder in eins zusammenfasst:

$$R=\frac{1-\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}+\alpha\beta\gamma R_1,\ \text{wo}\ R_1=\frac{1}{1-\alpha\gamma}+\frac{\beta\gamma}{1-\alpha\gamma^2}+\frac{\beta^2\gamma^2}{1-\alpha\gamma^3}+\cdots$$

Wie man sieht, entsteht R_1 aus R dadurch, dass man darin $\alpha\gamma$ für α und $\beta\gamma$ für β setzt. Nennt man R_2 die Reihe, in welche durch dieselben Substitutionen R_1 übergeht, u. s. f., so hat man daher:

$$R_1=\frac{1-\alpha\beta\gamma^2}{(1-\alpha\gamma)(1-\beta\gamma)}+\alpha\beta\gamma^3 R_2,\ \ R_2=\frac{1-\alpha\beta\gamma^4}{(1-\alpha\gamma^2)(1-\beta\gamma^2)}+\alpha\beta\gamma^5 R_3.$$

. . . .

Multiplicirt man die Gleichungen, welche R, R_1, R_2 ... durch R_1, R_2, R_3 ... ausdrücken, mit 1, $\alpha\beta\gamma$, $\alpha^2\beta^2\gamma^4$, $\alpha^3\beta^3\gamma^9$, ... und addirt sie, so erhält man[1]):

$$R=\frac{1-\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}+\alpha\beta\gamma\frac{1-\alpha\beta\gamma^2}{(1-\alpha\gamma)(1-\gamma\beta)}+\alpha^2\beta^2\gamma^4\frac{1-\alpha\beta\gamma^4}{(1-\alpha\gamma^2)(1-\beta\gamma^2)}+\cdots$$

Das $n+1$. Glied dieser unendlichen Reihe ist:

$$\alpha^n\beta^n\gamma^{n^2}\frac{1-\alpha\beta\gamma^{2n}}{(1-\alpha\gamma^n)(1-\beta\gamma^n)}.$$

Die Coëfficienten a_{11}, a_{12}, a_{22} sind durch R ausgedrückt:

---

1) Ein besonders einfacher Fall der Gleichung, die man durch Gleichsetzung der für R ursprünglich angenommenen und der nun dafür gefundenen Reihe erhält, ist der, dass $\alpha=\beta=\gamma=x$ ist. Fügt man noch den Factor x hinzu, so wird sie:

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\ldots+\frac{x^n}{1-x^n}+\ldots=x\frac{1+x}{1-x}+x^4\frac{1+x^2}{1-x^2}+\ldots+x^{n^2}\frac{1+x^n}{1-x^n}+.$$

Diese Gleichung ist schon von Clausen in Crelle's Journ. **3.** p. 97 angegeben.

$$a_{11} = a\,(1 - \xi^2)\, R(\alpha = \xi^2, \beta = q^2, \gamma = q^4);$$
$$-a_{11} = \frac{ab}{c}(1 - q^4)\, R\,(\alpha = q^4, \beta = q^2, \gamma = q^4);$$
$$a_{22} = b\,(1 - \eta^2)\, R(\alpha = \eta^2, \beta = q^2, \gamma = q^4).$$

Haben die Radien der beiden Kugeln, a und b, gleiche Grösse, so ist:

$$\xi = \eta = q, \quad q + \frac{1}{q} = \frac{c}{a},$$

und setzt man noch $a = 1$, so wird:

$$2\,q = c - \sqrt{c^2 - 4},$$

$$a_{11} = a_{22} = 1 + q^2 + q^8(1 - q^2)\frac{1 + q^6}{1 - q^6} + q^{24}(1 - q^2)\frac{1 + q^{10}}{1 - q^{10}} + \cdots$$

mit dem n. Gliede:

$$q^{4n.n-1}(1 - q^2)\frac{1 + q^{4n-2}}{1 - q^{4n-2}}$$

und:

$$-a_{12} = \frac{1}{c} + q^3 + q^{11}\frac{(1-q^2)\,(1-q^{14})}{(1-q^6)\,(1-q^8)} + q^{29}\frac{(1-q^2)\,(1-q^{22})}{(1-q^{10})\,(1-q^{12})} + \cdots$$

mit dem n. Gliede:

$$q^{4n^2-2n-1}\frac{(1-q^2)\,(1-q^{8n-2})}{(1-q^{4n-2})\,(1-q^{4n})}.$$

Für denselben Fall, dass $a = b = 1$, findet man hieraus weiter, indem man benutzt, dass:

$$\frac{\partial q}{\partial c} = -\frac{q^2}{1 - q^2} \qquad \text{ist:}$$

$$-\tfrac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial c} = \frac{q^3}{1-q^2} + q^9\frac{1+q^6}{1-q^6}\left(4 - \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{6q^6}{1-q^{12}}\right)$$
$$+ q^{25}\frac{1+q^{10}}{1-q^{10}}\left(12 - \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{10q^{10}}{1-q^{20}}\right) + q^{49}\frac{1+q^{14}}{1-q^{14}}\left(24 - \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{14q^{14}}{1-q^{28}}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial a_{12}}{\partial c} = \frac{1}{2c^2} + \tfrac{3}{2}\frac{q^4}{1-q^2}$$
$$+ q^{12}\frac{1 - q^{14}}{(1-q^6)\,(1-q^8)}\left(\frac{11}{2} - \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{3q^6}{1-q^6} + \frac{4q^8}{1-q^8} - \frac{7q^{14}}{1-q^{14}}\right)$$
$$+ q^{30}\frac{1 - q^{22}}{(1-q^{10})\,(1-q^{12})}\left(\frac{29}{2} - \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{5q^{10}}{1-q^{10}} + \frac{6q^{12}}{1-q^{12}} - \frac{11q^{22}}{1-q^{22}}\right)$$
$$+ q^{56}\frac{1 - q^{30}}{(1-q^{14})\,(1-q^{16})}\left(\frac{55}{2} - \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{7q^{14}}{1-q^{14}} + \frac{8q^{16}}{1-q^{16}} - \frac{15q^{30}}{1-q^{30}}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Um die Convergenz dieser Reihen zu zeigen, habe ich ihre ersten Glieder für die oben gewählten Werthe von c berechnet.[1])

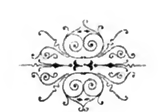
	$c = 2{,}1$	$c = 2{,}5$	$c = 4$
	1,532 672	1,250 000	1,071 797
	0,051 021	0,003 024	0,000 025
	0,000 266		
$a_{11} =$	1,583 96	1,253 02*	1,071 82
	0,864 958	0,525 000	0,269 239
	0,018 512	0,000 374	
	0,000 054		
$-a_{12} =$	0.883 52*	0,525 37	0,269 24
	0,831 894	0,166 667	0,020 726
	0,301 853	0,007 577	0,000 028
	0,004 685		
	0,000 005		
$\frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial c} =$	1,138 44	0,174 24*	0,020 75
	1,024 108	0,205 000	0,039 580
	0,149 131	0,001 302	0,000 001
	0,001 153		
	0,000 001		
$\frac{1}{2}\frac{\partial a_{12}}{\partial c} =$	1,174 39	0,206 30	0,039 58.

Man ersieht hieraus unter anderem, dass bei einigermassen grossen Entfernungen der Kugeln die fraglichen Coëfficienten mit grosser Genauigkeit durch die Ausdrücke dargestellt sind:

$$a_{11} = 1 + q^2 \qquad -\frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial c} = \frac{q^3}{1-q^2}$$

$$-a_{12} = \frac{1}{c} + q^3 \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial a_{12}}{\partial c} = \frac{1}{2c^2} + \frac{3}{2}\frac{q^4}{1-q^2}.$$

1) Von den hier berechneten Werthen der Reihen stimmen die mit einem Sternchen bezeichneten nicht ganz überein mit den entsprechenden der von Sir W. Thomson veröffentlichten Tafel. Statt derselben finden sich dort die Zahlen: 1,25324, 0,88175, 0,17432.



Ueber die Reflexion und Brechung des Lichts an der Grenze kryst-
nischer Mittel.
Ueber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit.
Ueber die Kräfte, welche zwei unendlich dünne, starre Ringe in ei-
Flüssigkeit scheinbar auf einander ausüben können.
Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen.
Ueber stehende Schwingungen einer schweren Flüssigkeit.
Versuche über stehende Schwingungen des Wassers.
Ueber einen Satz der mechanischen Wärmetheorie und einige Anwendungen
desselben.
Bemerkung über die Spannung des Wasserdampfes bei Temperaturen,
die dem Eispunkte nahe sind.
Ueber die Spannung des Dampfes von Mischungen aus Wasser und
Schwefelsäure.
Ueber die Leitungsfähigkeit des Eisens für die Wärme.
Ueber den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schall-
bewegung.
Ueber den Winkel der optischen Axen des Aragonits für die verschiedenen
Fraunhofer'schen Linien.
Ueber die Fraunhofer'schen Linien.
Ueber den Zusammenhang zwischen Emission und Absorption von Licht
und Wärme.
Ueber das Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Ab-
sorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht.
Chemische Analyse durch Spectralbeobachtungen.
Zur Geschichte der Spectral-Analyse und der Analyse der Sonnen-
atmosphäre.

[illegible] auf die ebenfalls im Verlage
[illegible] Barth in Leipzig erschienene und von

Prof. Dr. Ludwig Boltzmann

[illegible] Kirchhoff gehaltene

Festrede

[illegible] 1888. M. 1.—)

[illegible] der Persönlichkeit und der
[illegible] Kirchhoff enthält und daher
[illegible] der Spectralanalyse [illegible]

Ueber die Reflexion und Brechung des Lichts an der Grenze krystallinischer Mittel.
Ueber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit.
Ueber die Kräfte, welche zwei unendlich dünne, starre Ringe in einer Flüssigkeit scheinbar auf einander ausüben können.
Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen.
Ueber stehende Schwingungen einer schweren Flüssigkeit.
Versuche über stehende Schwingungen des Wassers.
Ueber einen Satz der mechanischen Wärmetheorie und einige Anwendungen desselben.
Bemerkung über die Spannung des Wasserdampfes bei Temperaturen, die dem Eispunkte nahe sind.
Ueber die Spannung des Dampfes von Mischungen aus Wasser und Schwefelsäure.
Ueber die Leitungsfähigkeit des Eisens für die Wärme.
Ueber den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung.
Ueber den Winkel der optischen Axen des Aragonits für die verschiedenen Fraunhofer'schen Linien.
Ueber die Fraunhofer'schen Linien.
Ueber den Zusammenhang zwischen Emission und Absorption von Licht und Wärme.
Ueber das Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht.
Chemische Analyse durch Spectralbeobachtungen.
Zur Geschichte der Spectral-Analyse und der Analyse der Sonnenatmosphäre.

---

ze krys

zeit
ge in a

endung

erature

ser m

Schal

edenen

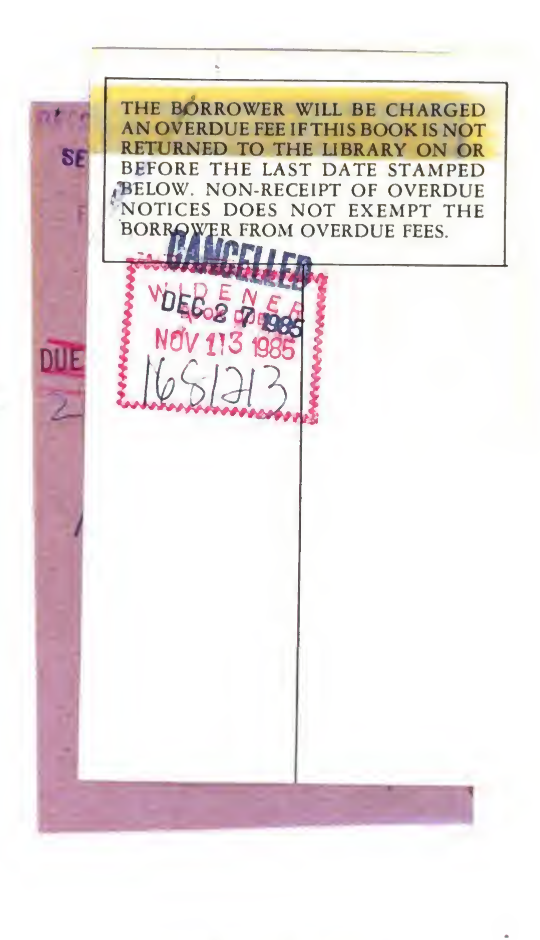
Licht

Ab-

en-

e

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.


THE BORROWER WILL BE CHARGED AN OVERDUE FEE IF THIS BOOK IS NOT RETURNED TO THE LIBRARY ON OR BEFORE THE LAST DATE STAMPED BELOW. NON-RECEIPT OF OVERDUE NOTICES DOES NOT EXEMPT THE BORROWER FROM OVERDUE FEES.
CANCELLED
WIDENER
DEC 2 7 1985
NOV 13 1985
1681213
DUE

